

Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática

Dario Fiorentini e
Maria Ângela Miorim
Docentes da Faculdade de Educação da UNICAMP

Publicado no **Boletim SBEM-SP**
Ano 4 - nº 7

As dificuldades encontradas por alunos e professores no processo ensino-aprendizagem da matemática são muitas e conhecidas. Por um lado, o aluno não consegue entender a matemática que a escola lhe ensina, muitas vezes é reprovado nesta disciplina, ou então, mesmo que aprovado, sente dificuldades em utilizar o conhecimento "adquirido", em síntese, não consegue efetivamente ter acesso a esse saber de fundamental importância.

O professor, por outro lado, consciente de que não consegue alcançar resultados satisfatórios junto a seus alunos e tendo dificuldades de, por si só, repensar satisfatoriamente seu fazer pedagógico procura novos elementos - muitas vezes, meras receitas de como ensinar determinados conteúdos - que, acredita, possam melhorar este quadro. Uma evidência disso é, positivamente, a participação cada vez mais crescente de professores nos encontros, conferências ou cursos.

São nestes eventos que percebemos o grande interesse dos professores pelos materiais didáticos e pelos jogos. As atividades programadas que discutem questões relativas a esse tema são as mais procuradas. As salas ficam repletas e os professores ficam maravilhados diante de um novo material ou de um jogo desconhecido. Parecem encontrar nos materiais a solução - a fórmula mágica- para os problemas que enfrentam no dia-a-dia da sala de aula.

O professor nem sempre tem clareza das razões fundamentais pelas quais os materiais ou jogos são importantes para o ensino-aprendizagem da matemática e, normalmente são necessários, e em que momento devem ser usados.

Geralmente costuma-se justificar a importância desses elementos apenas pelo caráter "motivador" ou pelo fato de se ter "ouvido falar" que o ensino da matemática tem de partir do concreto ou, ainda, porque através deles as aulas ficam mais alegres e os alunos passam a gostar da matemática.

Entretanto, será que podemos afirmar que o material concreto ou jogos pedagógicos são realmente indispensáveis para que ocorra uma efetiva aprendizagem da matemática?

Pode parecer, a primeira vista, que todos concordem e respondam sim a pergunta. Mas isto não é verdade. Um exemplo de uma posição divergente é colocada por Carraher & Schilemann (1988), ao afirmarem, com base em suas pesquisas, que *"não precisamos de objetos na sala de aula, mas de objetivos na sala de aula, mas de situações em que a resolução de um problema implique a utilização dos princípios lógico-matemáticos a serem ensinados"* (p. 179). Isto porque o material *"apesar de ser formado por objetivos, pode ser considerado como um conjunto de objetos 'abstratos' porque esses objetos existem apenas na escola, para a finalidade de ensino, e não tem qualquer conexão com o mundo da criança"* (p. 180). Ou seja, para estes pesquisadores, o concreto para a criança não significa necessariamente os materiais manipulativos, mas as situações que a criança tem que enfrentar socialmente.

As colocações de Carraher & Schilemann nos servem de alerta: não podemos responder sim aquelas questões sem antes fazer uma reflexão mais profunda sobre o assunto.

Com efeito, sabemos que existem diferentes propostas de trabalho que possuem materiais com características muito próprias, e que os utilizam também de forma distinta e em momentos diferentes no processo ensino-aprendizagem.

Qual seria a razão para a existência desta diversidade?

Na verdade, por trás de cada material, se esconde uma visão de educação, de matemática, do homem e de mundo; ou seja, existe, subjacente ao material, uma proposta pedagógica que o justifica.

O avanço das discussões sobre o papel e a natureza da educação e o desenvolvimento da psicologia, ocorrida no seio das transformações sociais e políticas contribuíram historicamente para as teorias pedagógicas que justificam o uso na sala de aula de materiais "concretos" ou jogos fossem, ao longo dos anos, sofrendo modificações e tomando feições diversas.

Até o séc. XVI, por exemplo, acreditava-se que a capacidade de assimilação da criança era idêntica à do adulto, apenas menos desenvolvida. A criança era considerada um adulto em miniatura. Por esta razão, o ensino deveria acontecer de forma a corrigir as deficiências ou defeitos da criança. Isto era feito através da transmissão do conhecimento. A aprendizagem do aluno era considerada passiva, consistindo basicamente em memorização de regras, formulas, procedimentos ou verdades localmente organizadas. Para o professor desta escola - cujo o papel era o de transmissor e expositor de um conteúdo pronto e acabado - o uso de materiais ou objetos era considerado pura perda de tempo, uma atividade que perturbava o silêncio ou a disciplina da classe. Os poucos que os aceitavam e utilizavam o faziam de maneira puramente demonstrativa, servindo apenas de auxiliar a exposição, a visualização e memorização do aluno. Exemplos disso são: o flanelógrafo, as réplicas grandes em madeira de figuras geométricas, desenhos ou cartazes fixados nas paredes... Em síntese, estas constituem as bases do chamado "Ensino Tradicional" que existe até hoje em muitas de nossas escolas.

Já no séc. XVII, este tipo de ensino era questionado. Comenius (1592-1671) considerado o pai da Didática, dizia em sua obra "Didática Magna" (1657) que *"...ao invés de livros mortos, por que não podemos abrir o livro vivo da natureza? Devemos apresentar a juventude as próprias coisas, ao invés das suas sombras"* (Ponce, p.127).

No séc. XVIII, Rousseau (1727 - 1778), ao considerar a Educação como um processo natural do desenvolvimento da criança, ao valorizar o jogo, o trabalho manual, a experiência direta das coisas, seria o precursor de uma nova concepção de escola. Uma escola que passa a valorizar os aspectos biológicos e psicológicos do aluno em desenvolvimento: o sentimento, o interesse, a espontaneidade, a criatividade e o processo de aprendizagem, as vezes priorizando estes aspectos em detrimento da aprendizagem dos conteúdos.

É no bojo dessa nova concepção de educação e de homem que surgem, primeiramente, as propostas de Pestalozzi (1746 - 1827) e de seu seguidor Froebel (1782 - 1852). Estes foram os pioneiros na configuração da "escola ativa". Pestalozzi acreditava que uma educação seria verdadeiramente educativa se proviesse da atividade dos jovens. Fundou um internato onde o currículo adotado dava ênfase à atividades dos alunos como canto, desenho, modelagem, jogos, excursões ao ar livre, manipulação de objetos onde as descrições deveriam preceder as definições; o conceito nascendo da experiência direta e das operações sobre as coisas [4, pp. 17 - 18].

Posteriormente, Montessori (1870 - 1952) e Decroly (1871 - 1932), inspirados em Pestalozzi iriam desenvolver uma didática especial (ativa) para a matemática.

A médica e educadora italiana, Maria Montessori, após experiências com crianças excepcionais, desenvolveria, no início deste século, vários materiais manipulativos destinados a aprendizagem da matemática. Estes materiais, com forte apelo a "percepção visual e tátil", foram posteriormente estendidos para o ensino de classes normais. Acreditava não haver aprendizado sem ação: *"Nada deve ser dado a criança, no campo da matemática, sem primeiro apresentar-se a ela uma situação concreta que a leve a agir, a pensar, a experimentar, a descobrir, e daí, a mergulhar na abstração"* (Azevedo, p. 27)

Entre seus materiais mais conhecidos destacamos: "material dourado", os "triângulos construtores" e os "cubos para composição e decomposição de binômios, trinômios".

Decroly, no entanto, não põe nada na mão da criança materiais para que ela construa mas sugere como ponto de partida fenômenos naturais (como o crescimento de uma planta ou a quantidade de chuva recolhida num determinado tempo, para por exemplo, introduzir medições e contagem). Ou seja, parte da observação global do fenômeno para, por análise, decompô-lo.

Castelnuovo (1970) denomina o método Decroly de "ativo - analítico" enquanto que o de Montessori de "ativo - sintético" (sintético porque construtivo). Em ambos os métodos falta, segundo Castelnuovo, uma "certa coisa" que conduz a criança à indução própria do matemático. é com base na teoria piagetiana que aponta para outra direção: A idéia fundamental da ação é que ela seja reflexiva...*"que o interesse da criança não seja atraído pelo objeto material em si ou pelo ente matemático, senão pelas operações sobre o objeto e seus entes. Operações que, naturalmente, serão primeiro de caráter manipulativo para depois interiorizar-se e posteriormente passar do concreto ao abstrato. Recorrer a ação, diz Piaget, não conduz de todo a um simples empirismo, ao contrário, prepara a dedução formal ulterior, desde que tenha presente que a ação, bem conduzida, pode ser operatória, e que a formalização mais adiantada o é também"* [4, pp. 23-28].

Assim interpreta Castelnuovo, o 'concreto' deve ter uma dupla finalidade : *"exercitar as faculdades sintéticas e analíticas da criança"* ; sintética no sentido de permitir ao aluno construir o conceito a partir do concreto; analítica por que, nesse processo, a criança deve discernir no objeto aqueles elementos que constituem a globalização. Para isso o objeto tem de ser móvel, que possa sofrer uma transformação para que a criança possa identificar a operação - que é subjacente [4, pp. 82 - 91]

Resumindo, Castelnuovo defende que *"o material deverá ser artificial e também ser transformável por continuidade"* (p. 92). Isto porque recorrermos aos fenômenos naturais, como sugere Decroly, nele há sempre continuidade, porém, são limitados pela própria natureza e não nos levam a extrapolar, isto é, a idealizar o fenômeno por outro lado, podem conduzir à idéia de infinito, porém lhes faltam o caráter de continuidade e do movimento (p. 92).

Para contrapor ao que acabamos de ver, gostaríamos de dizer algumas palavras sobre outra corrente psicológica: o behaviorismo, que também apresenta sua concepção de material, e principalmente, de jogo pedagógico. Segundo Skinner (1904), a aprendizagem é uma mudança de comportamento (desenvolvimento de habilidades ou mudanças de atitudes) que decorre como resposta a estímulos externos, controlados por meio de reforços. A matemática, nesta perspectiva, é vista, muitas vezes, como um conjunto de técnicas, regras, fórmulas e algoritmos que os alunos tem de dominar para resolver os problemas que o mundo tecnológico apresenta.

Os Métodos de ensino enfatizam, além de técnicas de ensino como instrução programada (estudo através de fichas ou módulos instrucionais) o emprego de tecnologias modernas audiovisuais (retroprojeter, filmes, slides ...) ou mesmo computadores.

Os jogos pedagógicos, nesta tendência, seriam mais valorizados que os materiais concretos. Eles podem vir no início de um novo conteúdo com a finalidade de despertar o interesse da criança ou no final com o intuito de fixar a aprendizagem e reforçar o desenvolvimento de atitudes e habilidades.

Para Irene Albuquerque (1954) o jogo didático *"...serve para fixação ou treino da aprendizagem. é uma variedade de exercício que apresenta motivação em si mesma, pelo seu objetivo lúdico... Ao fim do jogo, a criança deve ter treinado algumas noções, tendo melhorado sua aprendizagem"* (p. 33)

Veja também a importância dada ao jogo na 'formação educativa' do aluno "... através do jogo ele deve treinar honestidade, companheirismo, atitude de simpatia ao vencedor ou ao vencido, respeito as regras estabelecidas, disciplina consciente, acato às decisões do juiz..." (Idem, p. 34)

Esta diversidade de concepções acerca dos materiais e jogos aponta para a necessidade de ampliar nossa reflexão.

Queremos dizer que, antes de optar por um material ou um jogo, devemos refletir sobre a nossa proposta político-pedagógica; sobre o papel histórico da escola, sobre o tipo de aluno que queremos formar, sobre qual matemática acreditamos ser importante para esse aluno.

O professor não pode subjugar sua metodologia de ensino a algum tipo de material porque ele é atraente ou lúdico. Nenhum material é válido por si só. Os materiais e seu emprego sempre devem, estar em segundo plano. A simples introdução de jogos ou atividades no ensino da matemática não garante uma melhor aprendizagem desta disciplina.

É freqüente vermos em alguns professores uma mistificação dos jogos ou materiais concretos. Até mesmo na Revista "Nova Escola" esta mistificação, pode ser percebida como mostra o seguinte fragmento: "*Antes a matemática era o terror dos alunos. Hoje ... as crianças adoram porque se divertem brincando, ao mesmo tempo que aprendem sem decoreba e sem traumas...*" Mariana Manzela (8 anos) confirma isto : "*é a matéria que eu mais gosto porque tem muitos jogos*" [No.39, p. 16].

Ora, que outra função tem o ensino de matemática senão o ensino da matemática? É para cumprir esta tarefa fundamental que lançamos mão de todos os recursos que dispomos.

Ao aluno deve ser dado o direito de aprender. Não um 'aprender' mecânico, repetitivo, de fazer sem saber o que faz e por que faz. Muito menos um 'aprender' que se esvazia em brincadeiras. Mas um aprender significativo do qual o aluno participe raciocinando, compreendendo, reelaborando o saber historicamente produzido e superando, assim, sua visão ingênua, fragmentada e parcial da realidade.

O material ou o jogo pode ser fundamental para que isto ocorra. Neste sentido, o material mais adequado, nem sempre, será o visualmente mais bonito e nem o já construído. Muitas vezes, durante a construção de um material o aluno tem a oportunidade de aprender matemática de forma mais efetiva.

Em outros momentos, o mais importante não será o material, mas sim, a discussão e resolução de uma situação problema ligada ao contexto do aluno, ou ainda, à discussão e utilização de um raciocínio mais abstrato.

Bibliografias

1. ALBUQUERQUE, Irene de. **Metodologia da Matemática**. Rio de Janeiro : Ed. Conquista, 1953
2. AZEVEDO, Edith D. M. **Apresentação do trabalho Montessoriano**. In: Ver. de Educação & Matemática no. 3, 1979 (pp. 26 - 27)
3. CARRAHER, T. N. **Na vida dez, na escola zero**. São Paulo: Cortez, 1988.
4. CASTELNUOVO, E. **Didática de la Matemática Moderna**. México: Ed. Trillas, 1970
5. DIENNES, Z. P. **Aprendizado moderno da matemática**. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1970
6. PONCE, Aníbal. **Educação e luta de classes**. São Paulo: Cortez, 1985.
7. SAVIANI, D. **Escola e democracia**. São Paulo: Cortez 1985.

Dentro de 10 ou 15 anos a ação humana de calcular estará em franca extinção, as calculadoras de hoje serão peças de museus. Quais serão as novas ferramentas, os novos problemas e os novos conteúdos? Preparar indivíduos para este cenário, queiramos ou não, é um desafio que qualquer educador(a) tem que enfrentar.

Demorou mas, enfim chegou. O debate, engasgado, sobre o uso da calculadora no ensino de matemática, por fim ocupa a atenção, agora com mais visibilidade, daqueles(as) que se dedicam à educação matemática em especial da educação de adultos. Antes tarde do que nunca. Não se trata de uma questão nova, Malba Tahan em seu *Didática da Matemática* (1961) já propunha que os cálculos trabalhosos e intrincados fossem feitos por máquinas de calcular, isto num tempo que as máquinas eram movidas a manivela. Mais recentemente há registros de diversas experiências com educandos adultos explorando calculadoras no ensino de matemática como são as da Profra. Gelsa Knijnik com os trabalhadores sem terra do Rio Grande do Sul e as do prof. Eduardo Sebastiane com povos indígenas do Brasil Central, só para citar alguns membros da comunidade da Educação Matemática brasileira.

Houve um tempo em que o argumento para não explorar a calculadora no ensino era que se tratava de um objeto caro cuja prioridade não se colocava (?). claro que tal justificativa era frágil, uma desculpa sem pé nem cabeça atropelada pelos fatos. Atualmente uma calculadora comum custa menos do que um maço de cigarros e além do mais não polui nem faz mal à saúde. Este discurso com aparentes intenções sociais, só serviu para aumentar ainda mais o fosso entre dirigentes, com acesso ao conhecimento e a tecnologia, e os dirigidos privados na escola, do acesso e domínio desta mesma tecnologia. Mas o que sempre emperrou uma tomada de posição mais firme sobre presença das calculadoras no ensino foram as crenças, desprovidas de investigação consistente, de que alunos e alunas, não importa a faixa etária ou condição social, ".. ficariam preguiçosos", ".. desaprenderiam os algoritmos" e ".. deixariam de raciocinar" caso usassem calculadoras na escola. Isto é tanto verdade como o velho mito de que "manga com leite faz mal à saúde".

Porém não bastou combater estes mitos, muitos educadores libertos da idéia de que a calculadora no ensino não traz malefícios, inverteram a questão:

Mas se o estudo da matemática com calculadoras não faz mal, por que faria bem?
Taí uma boa questão para refletir e tomar posição a fim de se ajustar aos tempos atuais.

Problemas realmente reais e números mal comportados

A calculadora possibilita aos indivíduos enfrentar os problemas realmente reais com seus números verdadeiros, tal como aparecem na vida cotidiana e nas atividades profissionais, números mal comportados, com muitas casas decimais ou aquelas frações com seus denominadores esquisitos.

Em nossa tradição curricular desenvolveu-se o mal hábito de "esconder o perigo", isto é, a realidade é mascarada em nome de uma certa facilitação, assim os textos didáticos, em sua maioria, evitam colocar seus leitores frente às situações com seus números verdadeiros, atualizados e realísticos no sentido que propõem os trabalhos de Freudenthal. Entretanto os indivíduos deste nosso mundo real, ao abrir um jornal, consultar uma tabela ou ler um relatório o que encontram pela frente são números como 365 (número de dias de um ano); preços como R\$ 3,72 por quilo de um certo corte de carne; porcentagens do tipo 0,25% que é o desconto do tal IPMF; ou ainda fatores como 1,0234 para corrigir uma certa prestação. Os números mal comportados são implacáveis para todos que administram os descontos de seus salários para pagar suas contas cotidianas.

Qualquer nível de ensino deve promover a aproximação da atividade matemática com a realidade onde estão os problemas com que nos defrontamos.

Calculadoras uma ferramenta em extinção ?

Por outro lado, as operações com os chamados números mal comportados são trabalhosas e demoradas se utilizados os algoritmos usuais. Os sistemas financeiros e administrativos dos setores comercial, industrial e de serviços que dominam a maioria das atividades profissionais já se deram conta disto há décadas, e cálculos como $1,0234 \times R\$ 38,57$ são feitas por máquinas, calculadoras ou computadores, pela rapidez e economia de tempo que proporcionam. No mundo atual saber fazer cálculo com lápis e papel é uma competência com importância relativa que deve conviver solidariamente com outras modalidades de cálculo como estimar, calcular mentalmente e usar adequadamente uma calculadora simples. Os indivíduos não podem ser privados de operar e dominar uma tecnologia que interfere em suas vidas. Esse processo evolutivo é histórico, hoje são as calculadoras e computadores, ontem foram as tabelas e as régua de cálculo, amanhã só especulando, as máquinas leitoras de barras com seus sensores óticos estão aí para instigar nossa imaginação. Devemos fazer bom proveito das calculadoras enquanto elas forem úteis e ainda estiverem à nossa disposição.



O uso da calculadora possibilita que os indivíduos, libertos da parte enfadonha, repetitiva e pouco criativa dos algoritmos de cálculo, centrem sua atenção nas relações entre as variáveis dos problemas que tem pela frente. Possibilita ainda que possam verificar, fazer hipóteses, familiarizar-se com certos padrões e fatos, utilizando-os como ponto de referência para enfrentar novas situações. Libertos da execução do cálculo os indivíduos se aventuram com mais disponibilidade a colocar as coisas em relação; esboçar, simular e executar projetos; investigar hipóteses. Em outras palavras, um bom uso dos instrumentos de cálculo contribui para que os indivíduos desenvolvam estruturas cognitivas de mais alto nível.

Arquitetura das calculadoras.

Se estamos de acordo que o uso da calculadora tem o poder de oxigenar a atividade matemática, então é importante aprender a conhecer a natureza do objeto calculadora, compreender seus mecanismos e tirar o máximo proveito de sua arquitetura e funções.

De comum a maioria das calculadoras permitem realizar as quatro operações básicas, daí em diante tudo vai depender da arquitetura dos sistemas de cada uma com suas capacidades de memória, funções e outros atributos. Há uma grande diversidade de calculadoras disponíveis. Para conhecer uma calculadora e suas possibilidades recomenda-se explorar certas atividades, cada uma com objetivos específicos.

Teclado e visor

Comunicamos às calculadoras o que queremos fazer através do teclado. A calculadora comunica o que está realizando ou o que realizou através do visor. Uma calculadora simples, tem teclas numéricas, de operações, memória e de limpeza.

As teclas numéricas, de operação e o visor.

As teclas numéricas não têm segredos, as de operações é que diferem de acordo com o modelo. Para os objetivos deste artigo omitirei uma discussão sobre operações e funções especiais para concentrar o foco do texto nas calculadoras básicas.

Quanto ao visor, de modo geral, comporta 8 posições.

As calculadoras científicas ou financeiras podem ter 10 ou 12 posições.

Uma vez que a quantidade de dígitos que comporta o visor é limitada, não é possível obter o valor verdadeiro de um número com mais do que sete casas decimais (no caso das calculadoras elementares), como é o caso do número 0,123456789 ou ainda de dízimas periódicas ou números irracionais, sendo assim as calculadoras só podem exibir aproximações, truncando ou arredondando.

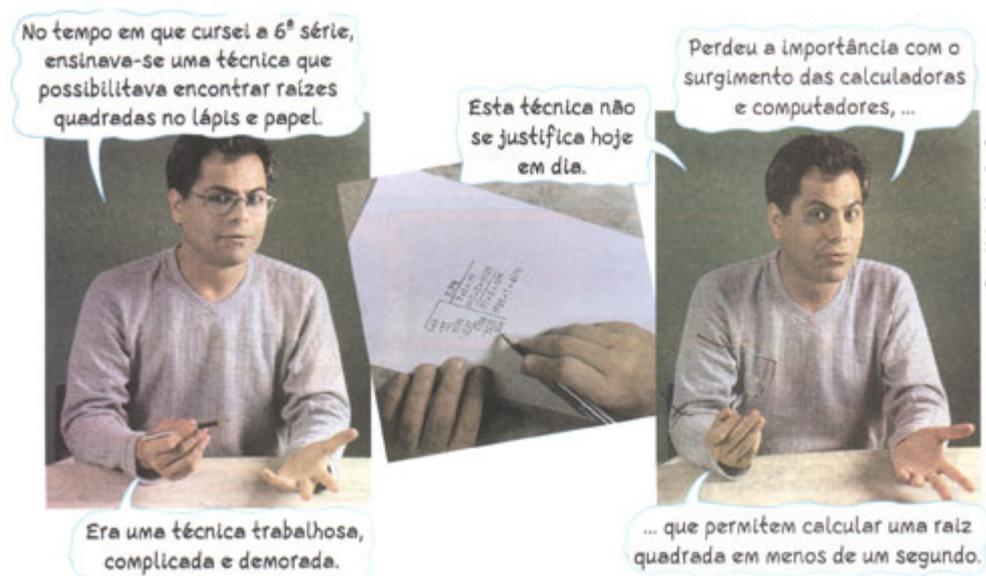
Para saber se uma calculadora trunca ou arredonda pode-se propor aos alunos(as) tentar obter o resultado de frações (associando-as à divisão) cujas expansões decimais sabemos que são infinitas, como $1/3$ ou $2/3$.

Ao teclar 1,3 o visor vai exibir 0.3333333

Neste caso não é possível saber se a máquina truncou ou arredondou.

Teclando 2,3 o visor vai exibir 0.6666666 se truncar ou 0.6666667 se arredondar.

Atente para o fato de que a exploração da calculadora para compreender seu funcionamento possibilita mergulhar os alunos(as) na introdução ou aprofundamento de conceitos ou procedimentos tais como : frações, números decimais, representações numéricas, idéias de operações, dízimas, aproximações, etc.



As Teclas de Memória

As calculadoras tem dispositivos conhecidos como Memória. As memórias da calculadora são ativadas através do teclado.

Numa calculadora simples há 3 tipos de teclas de memória.

A **memória aditiva** é ativada quando a tecla M+ é apertada.

M+ ou M+

Ao apertar esta tecla pela primeira vez a calculadora guarda o número registrado no visor, na memória que funciona como uma espécie de acumulador.

Quando apertada pela segunda ou terceira vez a calculadora adiciona o número registrado no visor ao conteúdo que está acumulado na memória.

A **memória subtrativa**, é ativada quando é apertada a tecla M- (M- ou M- dependendo do modelo). Esta tecla executa uma tarefa semelhante à anterior, entretanto ao acioná-la o valor registrado no visor é subtraído do conteúdo acumulado na memória.

Como recuperar ou chamar o conteúdo acumulado na memória ?

A tecla que recupera o acumulado na memória, pode ser identificada por qualquer uma das seqüências de letras seguintes, dependendo do modelo: RM, MR, MRC ou RCL.

RM : (Recall Memory : chamar a memória)
MR : (Memory Recall)
RCL : (Recall)
MRC : (Memory Recall and Clear : chama a memória e limpa)

algumas formas de tecla de memória:

Investigações mostraram que a maioria dos adultos que utilizam calculadoras desconhecem a função das teclas de memória e não as utilizam.

Hoje grande liquidação
cada lápis: R\$ 0,30
um bloco de papel: R\$ 0,75
uma calculadora: R\$ 1,20

comprar três dúzias de lápis, 15 blocos de papel e 18 calculadoras para um curso sobre "uso inteligente das calculadoras de bolso". O cálculo que deve ser feito para encontrar o gasto total é:

$$36 \times 0,30 + 15 \times 0,75 + 18 \times 1,20$$

Nos cálculos à mão com lápis e papel, costuma-se fazer 4 contas:

36 x 0,30 que dá o que você vai gastar com os lápis;
 15 x 0,75 que dá o que você vai gastar com os blocos de papel;
 18 x 1,20 que dá o que será gasto com as calculadoras;

Por fim deve-se somar os resultados para obter o gasto total.
 Utilizando as teclas de memória obtém-se o gasto total teclando a seguinte seqüência de teclas:

$$36 \times 0.30 = M+ \quad 15 \times 0.75 = M+ \quad 18 \times 1.20 \quad M+ \quad MR$$

Tecla	Visor	Acumulado na Memória	O que a máquina está fazendo
3	3	0	
6	36	0	
x	36	0	
0	0	0	
.	0.	0	
3	0.3	0	
0	0.30	0	
=	10.8	0	
M+	10.8	10.8	Envia o valor 10.8 registrado no visor para a memória
1	1	10.8	
5	15	10.8	
x	15	10.8	
0	0	10.8	
.	0.	10.8	
7	0.7	10.8	
5	0.75	10.8	
=	11.25	10.8	
M+	11.25	22.05	Soma o valor 11.25 registrado no visor a 10.8 que está acumulado na memória
1	1	22.05	
8	18	22.05	
x	18	22.05	
1	1	22.05	
.	1.	22.05	
2	1.2	22.05	
=	21.6	22.05	
M+	21.6	43.65	Soma o valor 21.6 registrado no visor a 22.05 que está acumulado na memória
MR	43.65	43.65	Exibe o valor acumulado na memória

radiografia da calculadora em ação

Se você deu uma nota de R\$ 50,00 e pretende saber quanto vai receber de troco, basta acionar a seqüência: **50 M+ 36 x 0.30 = M- 15 x 0.75 = M- 18 x 1.20 M- MR**

O resultado 6.35 deve surgir no visor em menos de 30 segundos.

Algumas calculadoras exigem que, antes de enviar o resultado de uma operação para a memória deve-se teclar = para obter o

resultado da operação, caso contrário ela envia o último registro. Há outras máquinas que efetuam o cálculo tão logo se tecla M+ ou M-.

As **teclas de limpeza**, como está indicado pelo nome servem para limpar os conteúdos do visor ou da memória.

As teclas C ou CE limpam a última entrada digitada. Para limpar o conteúdo acumulado na memória deve-se teclar MC ou CM. As teclas AC (All Clear) ou CA limpam todos os registros:

Ainda na fase da aprendizagem do funcionamento das calculadoras, merece destaque o tópico sobre a **hierarquia das operações**.

Tente executar, na ordem em que estão escritas, as operações da expressão:

$$2 + 3 \times 5$$

Um matemático seguro da velha ordem das coisas em que primeiro vem as operações multiplicativas e depois as aditivas esperaria 17 como resultado. Mas a maioria das calculadoras vai exibir o número 25, isto porque a arquitetura interna dos circuitos necessita de espaço de memória, assim as calculadoras estão programadas a executar os cálculos na ordem em que eles são teclados.

Passo	Teclas	Visor	O que a calculadora fez
I	2	2	registrou a primeira parcela, o 2
II	+	2	a calculadora espera a segunda parcela a ser somada à primeira
III	3	3	registrou a segunda parcela
IV	x	5	realizou o cálculo 2 + 3
V	5	5	registrou o fator 5
VI	=	25	realizou a multiplicação de 5 (passo IV) pelo fator 5 (passo V)

É importante reconhecer este fato para poder fazer um bom uso das calculadoras. Imagine um conferencista que controla os valores de uma tabela com cinco colunas de entrada, com uma mão ele opera a calculadora e com a outra ele anota o resultado final, na última coluna:

A	B	C	D	Preço
147,28	23,47	237	237	$P = (A + B) / (C + D)$

Para obter o preço é necessário calcular $\frac{147,28 + 23,47}{237 + 378}$

Sabendo que a calculadora não segue a ordem usual das operações, tal como aprendemos na escola, a sequência de teclas a serem acionadas afim de produzir o resultado diretamente no visor é: **237 + 378 = M+ 147,28 + 23,47 = ÷s MR**

A tecla de operador constante

Um importante recurso das calculadoras é a tecla de operador constante, desconhecida da maioria das pessoas, incluindo aí usuários tradicionais como bancários e professores. A tecla de operador constante é a tecla [=].

O que acontece se você teclar: 2 + 3 = = = = .

Teclas acionadas : 2 + 3 = = = = . .
 $\begin{array}{ccccccc} & \backslash & \backslash & \backslash & \backslash & & \\ \text{aparece no visor :} & 5 & 8 & 11 & 14 & 17 & \end{array}$

Teclando 3 + 2 = = = = . . a sequência gerada é 5, 7, 9, 11, 13, . .

O que ocorre se trocarmos a operação ?

Teclas acionadas : 2 x 3 = = = = . .
 $\begin{array}{ccccccc} & \backslash & \backslash & \backslash & \backslash & & \\ \text{aparece no visor :} & 6 & 12 & 24 & 48 & 96 & \end{array}$

Teclando 3 x 2 = = = = . . a sequência gerada é 6, 18, 54, 162, 486. .

Este recurso é bastante útil para enfrentar certos problemas que envolvem taxas fixas. Imagine um país que tem inflação mensal média de 20% ao mês aproximadamente, de quando em quando os preços dobram ?

Se tomamos uma das idéias da porcentagem, a de taxa, o fator multiplicativo 1,2 permite obter o valor final de

um produto após o aumento de 20%.

Teclando $1,2 \times = = = = . .$

O fator 1,2 funciona como operador constante, basta ficar de olho no visor para saber quando é que se atinge o número 2. Contando o número de tecladas do "=" (na primeira teclada obtemos $1,22=1,44$). Na virada do 4º para o 5º mês os preços dobram.

Este artifício serve também para prever quando uma dívida em que incidem juros à uma taxa de 10% ao mês, vai dobrar. Aqui o fator multiplicativo que corrige a dívida é 1,1. Fazendo $1.1 \times = = = = =$ descobrimos que em 7 meses somos duplamente mais devedores.

A calculadora possibilita o estudo de conceitos complexos antes reservados às séries mais avançadas.

Com o recurso da tecla de fator constante os juros compostos deixam de ser assunto inacessível para qualquer indivíduo que tenha uma cultura mínima sobre números racionais e porcentagem.

Com uma calculadora simples é possível obter a raiz quadrada, cúbica, quarta, quinta de qualquer número real a ($0 < a < 100.000.000$).

Certos profissionais utilizam raízes quadradas ou cúbicas para avaliar medidas. Seja por exemplo um pedreiro que tem que avaliar as dimensões de um reservatório aproximadamente cúbico com 2000 m^3 de capacidade. Não existe a tecla $\sqrt[3]{}$ nas calculadoras elementares. O problema pode ser resolvido pelo método das aproximações sucessivas. Para elevar um número x ao cubo teclamos: $x \times = =$

1ª tentativa: x	x^3	Resultado	Comentário
15	$15 \times = =$	3375	é muito
12	$12 \times = =$	1728	é pouco
13,5	$13,5 \times = =$	2460,375	é muito
12,8	$12,8 \times = =$	2097,152	Passou
12,6	$12,6 \times = =$	2000,376	Quase
12,5	$12,5 \times = =$	1953,125	é pouco
12,55	$12,55 \times = =$	1976,656375	é pouco
12,58	$12,58 \times = =$	1990,865512	é pouco
12,59	$12,59 \times = =$	1995,616979	é pouco

Sabemos que $12,59 < \sqrt[3]{2000} < 12,6$

Para as necessidades do pedreiro é possível que a informação $12 < \sqrt[3]{2000} < 13$, baste.

A calculadora pode ser utilizada para desenvolver habilidades de estimativa e cálculo mental.

Na escola tradicional atual o cálculo mental e as estimativas perderam prestígio, provavelmente devido à onda "modernista" que assolou a maior parte do mundo nos anos 60 e 70. Paradoxalmente nesta virada de século quando é possível realizar cálculos complexos num apertar de dedos em uma fração de segundo, outras modalidades de cálculo ganham importância. Chamarei aqui de competências de cálculo às capacidades dos indivíduos para estimar, fazer cálculo mental, compreender as operações e executar os algoritmos e por fim operar com inteligência uma calculadora. Uma vez que as máquinas realizarão os cálculos caberá aos indivíduos controlá-los.

Uma análise superficial do cotidiano de uma pessoa comum (não especialista), vamos nos dar conta de que são cada vez mais escassas as situações em que se tem que realizar um cálculo na ponta do lápis, por outro lado, fazemos com frequência estimativas e cálculos de cabeça. Rareiam os indivíduos que tem o hábito de conferir todas as contas (extratos bancários, notas de supermercados, contas de luz, ..), dada a confiança mítica que as máquinas provocam. Entretanto é comum ver uma pessoa controlando seus extratos ou contas com um simples passar de olhos.

Para a maior parte das necessidades cotidianas basta saber que $123,76 + 875,33$ é aproximadamente 1000. Este é um ponto importante, qualquer proposta de ensino que pretenda levar os alunos(as) a aprender a realizar cálculos tem que equilibrar a relação entre essas quatro modalidades de cálculo.

A **estimativa** pode ser potencializada com o auxílio da calculadora.

Atividade 1) Determine, sem fazer os cálculos, o menor intervalo que contém o resultado.

Limite inferior	Conta	Limite superior
72 (12x6=72)	12,345 x 6,789	90 (13x7 = 91)
199 (123+67+10-1)	123,45 + 67,8 + 9,12	210
1150 (1230-80)	1234,56 - 78,9	1160 (1240-80=1160)
20 (860÷43=20)	987,65÷43,21	23 (860÷43=20)

Os alunos escolhem os intervalos e em seguida utilizam a calculadora para conferir se suas estratégias para estimar resultados está refinada.

Atividade 2) Dê o valor aproximado de $\sqrt{78,35}$ ou um intervalo que o contém.

Aqui é importante ter pontos de referência como 64 e 81 que são quadrados perfeitos. $\sqrt{64} < \sqrt{78,35} < \sqrt{81}$, então $8 < \sqrt{78,35} < 9$ é um bom intervalo.

Tal como na atividade 1), calculadora é utilizada para confirmar e valorar a estratégia utilizada. O **cálculo mental** pode ser explorado através de atividades que põe em evidência as propriedades operatórias, tais como:

Atividade 3) Realize os cálculos abaixo sem acionar as teclas indicadas como "quebradas":

Operação	Tecla Quebrada	Soluções	Comentários
23 x 8	8	23 x 4 x 2 23 x 7 + 23	Decomposição do 8 em 4x2. Propriedade distributiva. 23x(7 + 1).
65 - 17	-	17 + 50 = 67 17 + 48 = 65	Idéia de completar para a subtração. Estratégia de tentativa e erro.
1432 ÷ 13	÷	1432 - 13 = = = ..	Idéia da divisão como subtração sucessiva, a contagem do número de vezes em que a tecla "=" é acionada antes de zerar dá o quociente.
34,57 x 12,125	,	3457 x 12125 ÷ 10000	Explicitação e significatividade para o algoritmo clássico: o produto de um número 100 vezes maior por outro 1000 vezes maior resulta num número 10000 vezes maior.
Encontrar o resto ? de 1432 ÷ 13	?		

Este último problema, sobre o resto na divisão, não se refere à uma tecla quebrada, mas sim à um tipo de problema que as calculadoras comuns não tem estrutura (refiro-me à arquitetura dos circuitos) para resolver, uma vez que e o visor é único e não tem duas saídas para exibir o quociente e o resto. Entretanto o problema pode ser resolvido desde que resgatemos as principais idéias da divisão e a estrutura do algoritmo usual. Acompanhe.

Ao teclar $1432 \div 13 =$
Obtém-se no visor o número 110.15384
A partir daí, há duas estratégias que permitem obter o resto:

a) $110 \times 13 = 1430$
 $1432 - 1430 = 2$
O resto é 2

Esta estratégia realça a estrutura do algoritmo:

$$\begin{array}{l} \mathbf{D} \div \mathbf{d} \quad \mathbf{D} = \mathbf{Q} \times \mathbf{d} + \mathbf{R}, \\ \text{---} \quad \quad \quad \text{logo} \\ \mathbf{R} \quad \mathbf{Q} \quad \mathbf{R} = \mathbf{D} - \mathbf{Q} \times \mathbf{d} \end{array}$$

b) 110.15384
 $110.15384 - 110 = 0.15384$
 $0.15384 \times 13 = 1.99992$
O resto é 2.

Em 3 prestações

40% é uma das representações da fração centesimal 40/100 cuja representação decimal é 0,4
 40% de 600 equivale a calcular 0,4x600.

Assim para avaliar qual a melhor maneira de comprar o fogão basta teclar a sequência:

Operações Realizadas	0.4 x 600						(600 - 240) ÷ 2								
Teclas Apertadas	.	4	x	6	0	0	M+	6	0	0	-	MR	÷	2	=
O que aparece no visor	0.	0.4	0.4	6	60	600	240	6	60	600	600	240	240	2	180

Pronto ! Os 40% de entrada correspondem a R\$ 240,00 e cada uma das prestações R\$ 180,00

>À vista

25% de 600 equivale a 25/100 de 600, que por sua vez equivale a 0,25x600

Operações Realizadas	0.25 x 600						600 - 150								
Teclas Apertadas	.	2	5	x	6	0	0	=	M+	6	0	0	-	MR	=
O que aparece no visor	0.	0.2	0.25	0.25	6	60	600	150	150	6	60	600	600	150	450

O preço à vista é de R\$ 450,00

Porém este último cálculo pode ser simplificado, para isto basta considerar que se foi dado um desconto de 25% então o novo preço do fogão vai ser 75% (100% - 25%), ou seja o preço total menos o desconto.

Então para se obter o preço diretamente basta calcular 0,75x600.

Esta última estratégia é mais econômica pois na anterior foram acionadas 15 teclas e nesta última apenas 8.

Vejamos outras situações envolvendo solidariamente porcentagens, proporções e probabilidade.

Situação 2) Numa banca de frutas 6 dúzias de laranjas custam R\$ 4,00, na outra 4 dúzias são custam R\$ 3,00 e na última 10 dúzias de laranjas são oferecidas por R\$ 6,00. Em qual das bancas o preço está mais em conta ?

Este problema pode ser resolvido comparando as razões:

$$\frac{4}{6}, \frac{3}{4} \text{ e } \frac{6}{10}$$

Usamos a calculadora para obter a forma decimal de cada razão:

$$4 \div 6 = 0,66\dots \qquad 3 \div 4 = 0,75\dots \qquad \mathbf{6 \div 10 = 0,6.}$$

O melhor é comprar laranjas da última banca.

Situação 3) Um trabalhador recebe R\$ 824,00 de salário mensal, está prevista uma gratificação de 12%. Quanto ele vai receber de salário líquido lembrando que são descontados 10% de encargos ?

Solução: 824 corresponde a 100% do salário com mais 12% o montante vai ser 112% (que equivale a 112/100 ou 1,12)

Então para calcular o salário bruto basta calcular 1,12x824 = 922,88

Para calcular o salário líquido basta descontar os encargos :

$$100\% - 10\% = 90\% \text{ (90 / 100 ou 0,9)}$$

$$0,9 \times 922,88 = 830,592$$

Arredondando temos que o salário líquido vai ser de R\$ 830,60

Situação 4) Este mesmo trabalhador pagar R\$ 254,00 de aluguel. Que porcentagem do seu salário líquido corresponde o aluguel ?

No caso se quer saber que parte 254 é de 830,26. Ao calcular a razão $\frac{254,00}{830,60}$,

efetuando 254 ÷ 830.6 na calculadora obtemos 0.305803 no visor ou

$$\frac{30,5803}{100}$$

Portanto o aluguel corresponde a 30,58% do salário líquido.

Cálculo de probabilidades com a calculadora

Situação 4) Num lote de 200 peças de uma pequena indústria, observou-se que 14 são defeituosas. Que porcentagem do lote corresponde as peças defeituosas ?

$$14 \div 200 = 0,07$$

0,07 equivale a 7/100 o que quer dizer que 7% das peças do lote são defeituosas.

Suponha que esta média se mantém sempre que se escolhe um lote deste tamanho, então podemos dizer que a probabilidade de encontrar uma peça defeituosa num lote qualquer é de 7%.

Situação 5) Sabe-se que num carregamento de peças de uma outra fábrica há 27 peças defeituosas e 423 peças boas. Qual é a chance de escolher uma peça qualquer ao acaso e esta ser defeituosa ?

$$\text{Total de peças: } 423 + 27 = 450$$

$$\text{Razão entre peças defeituosas e total de peças: } 27/450 \text{ -----} > 27,450=0,06$$

neste caso a probabilidade de escolher uma peça defeituosa é de 6%

Qual é então a chance de escolher ao acaso uma peça boa ?

$$423/450 = 0,94 \text{ ou } 94 \% (6\%+94\% =100\% \text{ como era de se esperar}).$$

Quanto a saber se a verba destinada para a educação é suficiente ... !??

Pegue sua calculadora e decida por si mesmo.

Calculadora como ferramenta para a investigação matemática.

É claro que este artigo não esgota as possibilidades de trabalho com a calculadora, porém este ficaria incompleto se não fizesse referência às possibilidades de investigação matemática com o auxílio da calculadora.

Parece até paradoxal, a calculadora enquanto **objeto matemático** por excelência tem um uso e uma função utilitária ilimitada, entretanto ela pode e deve ser usada com finalidades nada utilitárias, voltadas para aspectos recreativos de forte componente afetiva e estética associadas à investigação matemática. Acompanhe a seguinte atividade inspirada nos livros de matemática recreativa de Malba Tahan:

Quadrados invertíveis.

Pense um número qualquer;

Eleve-o ao quadrado;

Inverta o ordem do resultado;

Ache a raiz quadrada deste número;

Inverta a ordem do resultado.

Se o número obtido é o número que você pensou então ele é um quadrado invertível.

Acompanhe os passos.

Um número : 12

seu quadrado: $12^2 = 144$

invertendo a ordem dos algarismos: 441

a raiz quadrada de: 21

invertendo a ordem do resultado: 12

Ahá !

12 e 21 tem quadrados invertíveis.

Atividades

- 1) Descreva alguma condição para que um quadrado perfeito seja invertível.
- 2) Estude entre as dezenas menores do que 20 quais tem quadrados invertíveis. (Solução $13^2 = 169$ e $96^2 = 312$)
- 3) Mostre que 1022 e 2012 são quadrados invertíveis.
- 4) Mostre que 1122 e 2112 são quadrados invertíveis.
- 5) Descubra outros quadrados invertíveis.

Estas atividades ilustram alguns dos aspectos do que se entende que seja a atividade de investigação no ensino da matemática.

Considerações finais

As idéias aqui discutidas sobre calculadoras são apenas uma amostra de um conjunto bastante rico de atividades significativas cujo propósito é levar os indivíduos de qualquer idade, sexo ou condição social a extrair o máximo de suas capacidades cognitivas. Cabe ao professor(a) explorar por si as calculadoras e as atividades a elas associadas para propor aos alunos situações didáticas que os preparem verdadeiramente para enfrentar problemas reais que encontram na escola, no trabalho ou nas atividades cotidianas. Devemos estar preparados(as) para desafios bem mais complexos que já estão colocados pela presença cada vez maior das novas tecnologias em nossas vidas. Cabe à escola, formal ou não, ter os olhos no futuro para melhor agir sobre o presente. Nesse presente não há mais lugar para o adestramento de alunos(as) para resolver problemas ou executar técnicas obsoletas. A aceitação das calculadoras no ensino põe tudo isto em questão:

novos problemas

/

Novas ferramentas -->

\

novos conteúdos (conceituais e procedimentais)

No que se refere especificamente à formação de adultos, cabe alertar para a tentação utilitária que caracteriza a maioria das experiências. Se por um lado é fato que o adulto, por já estar inserido no mundo do trabalho e portanto, deve estar preparado para resolver os problemas "técnicos" próprios de suas atividades profissionais, de outro merece atenção a mudança do perfil profissional exigido pelo desenvolvimento da tecnologia, neste novo cenário ganham espaço aqueles indivíduos com formação para a diversidade, preparados para enfrentar problemas novos, com capacidades para simular, fazer relações complexas, articular variáveis, elaborar modelos, investigar, codificar e decodificar, se comunicar, tomar decisões, aprender por si. Todos estes atributos são necessários para a formação do homem de hoje não importa se ele é marceneiro, metalúrgico, bancário ou empresário. Uma consequência disto é que atividades com objetivos estritos de desenvolver o pensamento matemático, tal como proposto nos exemplos de exploração das propriedades de suporte do cálculo mental ou ainda no tópico final sobre investigação matemática, devem ter seu lugar ao sol, na hora de selecionar e organizar os problemas e conteúdos a serem trabalhados.

Dentro de 10 ou 15 anos a ação humana de calcular estará em franca extinção, as calculadoras de hoje serão peças de museus. Quais serão as novas ferramentas, os novos problemas e os novos conteúdos? Preparar indivíduos para este cenário, queiramos ou não, é um desafio que qualquer educador(a) tem que enfrentar.

Bibliografia

- Abelló, Frederic Udina i. [Aritmética y calculadora](#). Editorial Síntesis. Madrid. 1989.
- Bigode, Antonio J. L. [Matemática Atual](#). Atual Editora. São Paulo (coleção de 5ª a 8ª série com vários capítulos sobre o uso de calculadoras). 1995.
- Gimenez, J. y Gironde, L. [Cálculo en la Escuela](#). Graó. Barcelona. 1993.
- Lins, R. e Gimenez, J. [Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI](#). Papirus. Campinas. 1997.
- Castro, E. y otros. [Estimacion en calculo y medida](#). Editorial Síntesis. Madrid. 1989.

Reflexões sobre o ensino de frações no currículo de matemática

Há vários mitos e equívocos a respeito do currículo de matemática e sua implementação. Um dos mais preocupantes é o de que um tópico específico ou campo conceitual é exclusividade de uma determinada série. Um exemplo, há muitas décadas que o tema frações com todos seu acervo de conceitos e procedimentos subjacentes (frações próprias, equivalentes, ordenação, aplicações e cálculos) podem e devem ser "ensinados" na 5a. série como um pacote. É um grande erro. Há muitas questões que necessitam de reflexão respostas.

Os alunos aprendem ? O que eles aprendem ? Será que mecanizam procedimentos para se dar bem nas provas ? Como incorporam tudo o que é ensinado ? Porque, em geral, não transferem seus conhecimentos sobre frações para situações em que não foram ensinados ? Porque, em geral, se esquecem do que aprenderam quando passam para as séries seguintes ?

Frações sem pizzas e barras de chocolate ?

Quanto ao professor, que tal pensar sobre o seguinte: Como seria o ensino de frações se abríamos mão dos velhos recursos de partir pizzas e barras de chocolate ?

A divisão de frações por exemplo é apreendida pelos alunos com a mesma facilidade com que somam e subtraem ? Já experimentou levar os alunos a descobrir a regra da divisão de frações ?

O fato é que há dezenas, talvez centenas, de estudos sobre aprendizagem de frações, números racionais e atividades de proporcionalidade que mostram que há diferentes e diversas idéias em torno de um código $3/4$. E tem mais, sabemos baseado em investigações que as crianças tem concepções diversas sobre frações e a passagem de uma idéia para outra como da relação **parte-todo** para a fração como **número** ou **razão** não é simples e leva tempo. Investigações sérias mostram que a formação do pensamento proporcional é longa, estendendo-se dos 9/10 anos até os 14/15 anos. Não é de se estranhar portanto que os alunos tenham dificuldades, e que certos conceitos e procedimentos tem permanência curta, resistindo quando muito, do dia do "ponto ensinado" ao dia da prova.

Esses mesmos estudos sugerem que o ensino de frações deve ser gradativo, que deveríamos dosar o ensino das operações de modo que elas possam ser realmente conceituadas e incorporadas às estruturas de pensamento dos alunos.

Frações na Matemática Hoje

Tais investigações somadas à experiências didáticas desse autor, fundamentaram tomadas de decisão a respeito da organização e distribuição dos conteúdos relativos ao ensino de frações no currículo de matemática de 5a. a 8a. série, tal distribuição envolve atividades de conceitualização e usos das frações ao longo das 4 séries (5a. a 8a.) de modo que os alunos possam ser introduzidos ao estudo das frações na 5a. série (caso já tenham estudado frações na 4a. série), o trabalho na 5a. pode funcionar como revisão, reforço e introdução de novas situações, com ênfase no conceito de **fração equivalente** e nas operações aditivas (adição e subtração). A equivalência é utilizada para introduzir a forma decimal e para em seguida introduzir ou explorar as **porcentagens**.

Na 6a. série é feita uma revisão com problemas e situações novas para, aí sim, problematizar de modo que os alunos explorem as operações de natureza multiplicativa (multiplicação e divisão). Ainda na 6a. série a notação fracionária é utilizada nas situações usualmente intituladas de "razões e proporções".

Uma retomada é feita na 7a. série agora de uma perspectiva algébrica onde a fração é conceituada como número racional, formando o conjunto Q dos racionais, que surge como o primeiro conjunto denso que os alunos tem contato. A densidade é uma importante propriedade de conjuntos numéricos. O conjunto Q é dito denso porque dados quaisquer racionais x_1 e x_2 existe sempre um outro número racional entre eles. Esta propriedade pode ser provada quando se propõe aos alunos que achem a média aritmética de dois racionais quaisquer. Uma importante utilização dos racionais é feita 7a. série com a **Introdução às Probabilidades**. Diferentemente dos países desenvolvidos, no Brasil o estudo das probabilidades era exclusivo do currículo ensino médio.

Por fim na 8a. série os alunos são convidados a fazer um balanço formal de seus conhecimentos numéricos colocando os conjuntos dos vários tipos de números, que já dominam, em relação uns com os outros de modo a descobrir novas propriedades, estender definições, etc. No final da 8a. série quando estão estudando matemática comercial e financeira utilizam os números racionais na forma fracionária ou decimal como operadores: taxas, fatores de aumento ou decréscimo.

Esta tomada de posição metodológica adotada na coleção MH é consciente e apoiada em estudos incontestes que tem servido de alicerce para a maioria das recentes reformas curriculares em curso no mundo atual, resumida no seguinte: abordagem de um conceito ao longo das quatro séries de forma gradativa levando os alunos a enfrentar situações significativas para a faixa etária, numa escalada crescente de complexidade. Estes princípios são estendidos a outros tópicos do currículo como porcentagens, funções, álgebra etc.

Metodologia da Matemática, 2004/2005

para o curso de Matemática - Ramo Educacional

Sumários e referências bibliográficas

- 1ª aula: Apresentação da disciplina. O que é a Matemática? O que é a Metodologia da Matemática?
- 2ª aula: O que é a Matemática? Dificuldades no seu ensino, ontem e hoje.
 - Projecção do DVD "Músicos & Matemática"
 - refª: [Tom Lehrer](#)
 - refª: [Minutemen](#)
 - refª: [Blue Man Group](#)
 - refª: [Jimmy Buffett](#)
 - A escola de outros tempos:
 - refª: [Antigamente, a Escola... \(I\)](#) Por JOÃO BÉNARD DA COSTA: "(...) péssimo era em ciências, sobretudo em Matemática e Desenho. Por isso chumbei e por isso fui condenado a repetir as cinco disciplinas das tais ciências. Foi um ano negro, sem sombra de dúvida o ano mais negro da minha existência. Tinha grandes "buracos" nos horários (as horas em que os não-repetentes aprendiam letras) e vagueava entre casa e o liceu para repisar "matérias" que odiava. Lágrimas e suspiros? Pouco mais ou menos e não exagero muito. Se a palavra auto-estima já tivesse sido inventada, a minha andava muito por baixo, o que aos 16 anos não se recomenda." - [cópia local do artigo](#)
 - refª: [Antigamente, a Escola... \(II\)](#) Por JOÃO BÉNARD DA COSTA - "Perante alunos que, em 99 por cento dos casos, tinham ido para Letras por horror à matemática, de que ignoravam os mais rudimentares elementos (...), que fazia ele?" - [cópia local do artigo](#)
- 3ª aula: Que é a Matemática? Onde está a matemática?
 - Quanta matemática se conhece hoje? Quanta matemática poderá existir?
 - refª: [Philip Davis, Reuben Hersh](#) - [A experiência Matemática](#), Gradiva, 1995 (cap. 1)
 - Cada vez há mais revistas de investigação matemática: eis uma [lista de revistas gratuitas de investigação matemática lançadas desde 1995](#).
 - A [Biblioteca do Departamento de Matemática](#):
 - [Catálogo disponível via internet](#)
- 4ª aula: A variedade da experiência matemática
 - refª: [Philip Davis, Reuben Hersh](#) - [A experiência Matemática](#), Gradiva, 1995 (cap. 2)
 - Matemática e Arte
 - refª: Exposição "[Para além da terceira dimensão](#)"
 - O que é uma demonstração matemática?
 - "[When is a proof?](#)", Keith Devlin

- ["The shame of it"](#), Keith Devlin
 - [Shafarevitch e o Neo-Platonismo](#)
 - [Srinivasa Aiyangar Ramanujan](#)
 - [Josef Hoene de Wronski](#)
- 5ª aula: Matemática Pura e Matemática Aplicada
 - ["Rainha das negativas com trono assegurado?"](#)
 - refª: [Philip Davis](#), [Reuben Hersh](#) - [A experiência Matemática](#), Gradiva, 1995 (cap. 3 e 4)
 - Aplicações da Matemática à Economia e à Guerra
 - Exposição ["The Geometry of War 1500-1750"](#)
 - ["Mathematics and war"](#), Bernhelm Booss-Bavnbek, Roskilde University (Denmark)
 - ["A responsabilidade dos matemáticos na busca da paz"](#), Ubiratan D'Ambrosio, Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP (Brasil)
 - [John Nash, matemático, professor e Prémio Nobel de Economia](#)
 - [Gerard Debreu, economista e matemático, professor e Prémio Nobel de Economia](#)
 - [Kenneth J. Arrow, economista e matemático, professor e Prémio Nobel de Economia](#)
 - Axiomas da Teoria de conjuntos. [Axiomas Básicos de Teoria dos Conjuntos](#)
 - ["Principia Mathematica"](#) de Whitehead e Russell
 - A componente estética: a poesia de Fernando Pessoa/Álvaro de Campos. [Poesias de Álvaro de Campos](#)
- 6ª aula:
 - A importância da obra de Galileu: "O universo não pode ser compreendido a menos que primeiro aprendamos a linguagem no qual ele está escrito. Ele está escrito na linguagem matemática e os seus caracteres são o triângulo, o círculo e outras figuras geométricas, sem as quais é impossível compreender uma palavra que seja dele: sem estes, ficamos às escuras, num labirinto escuro."
 - Galileu Galilei: [vida e obra](#).
 - Livro recomendado: [A Filha de Galileu](#).
 - refª: [Philip Davis](#), [Reuben Hersh](#) - [A experiência Matemática](#), Gradiva, 1995 (cap. 3 e 4)
 - A importância actual do aleatório (lançamento de dados usando uma calculadora gráfica: aleatório?). A ordem e o caos.
 - [Introducción al Caos I](#)
 - [Introducción al Caos II](#)
 - [CAOS Y EL EFECTO MARIPOSA-Teoría y ejercicios](#)
- 7ª aula: (Abertura Solene das Aulas)
- 8ª aula: A diversidade da Matemática
 - [Classificação dos grupos finitos simples](#)
 - O [grupo monstro](#) tem 80801742479451287588645990496171107570057543680000000000 elementos!
 - A história do [último teorema de Fermat](#)
 - O livro ["Último Teorema de Fermat"](#) de Simon Singh (ed. Relógio D'Água; uma [recensão crítica](#) do livro)
 - Geometria não euclidiana: [O quinto postulado de Euclides](#)
- 9ª aula: A diversidade da Matemática
 - [Fourier e a Análise Matemática](#): Tradução livre, por Jorge Sotomayor, de fragmento da Introdução de "A Teoria do Calor" por J. L. Fourier, 1768-1830: "O estudo profundo da Natureza é a fonte mais fértil para a pesquisa matemática. Propondo um objecto específico de investigação, este estudo não só exclui questões vagas e cálculos despropositados como também fornece um método seguro para orientar o desenvolvimento da própria Análise Matemática, mostrando o que de essencial devemos conhecer e descobrir, e o que a Ciência Natural deve sempre preservar: que são os

elementos fundamentais reproduzidos nos efeitos naturais. Vemos, por exemplo, que as mesmas expressões abstractas que foram consideradas pelos géometras e que portanto pertencem à Análise geral, representam tanto o movimento da luz na atmosfera como determinam as leis da difusão do calor na matéria sólida, intervindo também nos problemas centrais da teoria da probabilidade."

- Características do Som: [Altura, Intensidade, Timbre - FOURIER - Som Complexo - Composição de Ondas Senoidais Simples](#) - Prof. Luiz Netto: "Observe o que Fourier descobriu: Qualquer sinal complexo pode ser decomposto em sinais senoidais com fases e amplitudes determinadas."
- Séries de Fourier: [Definição e exemplos](#)
- Biografia de [Jean Baptiste Joseph Fourier](#)
- Análise não standard: [Análise Não-Standard, uma linguagem para o estudo da Análise Elementar](#) Vítor Neves Departamento de Matemática Universidade de Aveiro, 1998: "Com o presente texto propomo-nos, entre outros fins, mostrar que é possível provar teoremas maiores da Análise Matemática bastante cedo no desenvolvimento da teoria, com uma terminologia porventura mais intuitiva que qualquer das usuais e evitando quase sempre a argumentação contravariante, característica das demonstrações clássicas."
- Análise não standard: [Os infinitésimos](#) por Georges Reeb. [Un Maître](#)
- O inventor da Análise não standard: [Abraham Robinson](#)
- 10ª aula: heurística, intuição e demonstração em Matemática
 - refª: ["HEURÍSTICA, HIPÓTESIS Y DEMOSTRACIÓN EN MATEMÁTICAS"](#) por Atocha Aliseda
 - refª: [Provas em ambiente de computador](#) por John Costello
 - refª: [A epistemologia de Imre Lakatos](#)
 - refª: ["História da Ciência e suas Reconstruções Racionais"](#), de [Imre Lakatos](#) por Pedro Galvão
 - refª: [Lakatos](#)
- 11ª aula: Platonismo, formalismo, construtivismo. O mito da perfeição de Euclides.
 - refª: [A natureza da Matemática](#) por João Pedro Ponte et al.
 - refª: [Formalismo hilbertiano vs. pensamento intuitivo](#) por Augusto J. Franco de Oliveira
 - refª: [Formalismo](#) por Olga Pombo
 - refª: [Philosophy of mathematics](#) por Stephen G Simpson
- 12ª aula:
 - A [hipótese de Riemann](#) constitui um dos [23 problemas de Hilbert](#) propostos em 1900 e ainda hoje por resolver, apesar de ter havido muitas propostas de demonstração, nomeadamente do famoso matemático [Louis de Branges de Bourcia](#), célebre por ter resolvido uma outra conjectura famosa, a [conjectura de Bieberbach](#) (ver ainda [Conjecture de Bieberbach](#) e [Bieberbach](#)). Quem resolver a hipótese de Riemann terá direito a um prémio de um milhão de dólares, constituindo o que se chama um dos [problemas do milénio](#), tal como foi definido pelo [Instituto Clay](#) que instituiu os prémios.
 - O cálculo das casas decimais do PI; refª: [Uma página sobre PI](#)
 - Demonstrações usando o computador; refª: [O teorema das quatro cores](#)
- 13ª aula: A modelação matemática e a sua importância na sociedade
 - refª: [Modelação Matemática](#)
 - refª: [Aplicações e Modelação Matemática](#)
 - refª: [A Modelação Matemática como metodologia de ensino](#) por Simone Leal
 - refª: [Modelação Matemática](#) no Estágio Pedagógico (Escola Secundária de Mem Martins)
- 14ª aula: A Matemática nos jornais As notícias dos jornais mostram que:
 - a) a matemática está mais presente nos jornais do que geralmente se reconhece;
 - b) a matemática é muito mais usada na sociedade do que se imagina;
 - c) aparecem asneiras sempre que a ignorância do jornalista atinge a matemática;
 - d) um jornalista nunca perde uma oportunidade para dizer mal da matemática.
 - refª: ["Números no século XX: usos e abusos"](#)
- 15ª aula: A Matemática nos jornais (conclusão)

- 16ª aula: A heurística de Polya para a resolução de problemas; consequências para a sala de aula
 - Estudo de [Como resolver problemas](#) de G. Polya
 - refª: [Matemática - Resolução de Problemas](#)
 - refª: O que é a resolução de problemas: [apresentação](#) de [João Pedro Ponte](#)
 - refª: [Breves dados biográficos sobre Polya](#)
 - refª: vida e obra de [George Pólya](#)
 - refª: [Polya Math Center](#): "A New Way to Learn Math"
 - refª: [Estrategias de resolución de problemas](#) de Lisette Poggioli
- 17ª aula:
 - DEZ MANDAMENTOS PARA PROFESSORES
 - 1. Seja interessado na sua ciência.
 - 2. Conheça a sua ciência.
 - 3. Conheça as formas de aprendizagem. A melhor maneira de aprender algo é descobri-lo por si mesmo.
 - 4. Tente ler nas faces dos seus estudantes, tente ver as suas expectativas e dificuldades, ponha-se no lugar deles.
 - 5. Dê-lhes não só a informação mas também saber, formas de raciocínio, hábitos de trabalho com método.
 - 6. Permita que aprendam por descoberta.
 - 7. Permita que aprendam provando.
 - 8. Encare as características do problema em mãos como podendo ser úteis na resolução de outros problemas - Tente descobrir o padrão geral que está por detrás da situação concreta presente.
 - 9. Não partilhe o seu segredo todo de uma vez só - Permita que os alunos o adivinhem antes que o diga - deixe que descubram por si mesmos, tanto quanto for possível.
 - 10. Sugira as coisas, não force os alunos a aceitar.
 - refª: ["Aprender, ensinar e aprender a ensinar"](#) de George Pólya
 - refª: ["Dez mandamentos para o professor"](#) de George Pólya
 - refª: ["Dez Mandamentos Para Professores"](#) por George Polya
 - refª: Elfrida Ralha - Didáctica da Matemática: **"Os 'mandamentos' do professor"** (pg. 148), Universidade Aberta, 1992.
- 18ª aula: Porque devem os professores reflectir sobre a prática profissional?
 - Artigos de João Pedro Ponte com o tema ["Investigar a nossa própria prática profissional/Colaboração"](#)
- 19ª aula: O estudo internacional PISA 2003 da OCDE
 - **Resultados do PISA 2003. Principais conclusões:**
 - 2. Em todos os domínios avaliados – leitura, matemática, ciências e resolução de problemas – os alunos portugueses de 15 anos tiveram um desempenho modesto, uma vez comparado com os correspondentes valores médios dos países do espaço da OCDE.
 - 3. Na literacia matemática, área predominante no PISA 2003, verificou-se existir uma percentagem demasiado elevada de alunos portugueses de 15 anos com nível de proficiência inferior a 1, o que configura uma situação grave para cerca de um terço dos nossos estudantes.
 - 4. A comparação de resultados obtidos em literacia matemática no PISA 2000 com os resultados obtidos em 2003 indica que, neste domínio, existiu uma ligeira melhoria. Temos, no entanto, que considerar que, do primeiro para o segundo estudo, existiu uma alteração na população alvo: se em 2000 foram seleccionados alunos de 15 anos entre os 5º e 11º anos de escolaridade, em 2003 o intervalo diminuiu, correspondendo agora aos estudantes entre os 7º e 11º anos de escolaridade.
 - 5. Existe uma associação positiva entre o desempenho médio dos alunos de cada país e o rendimento nacional ou o gasto por aluno nesse país. Se ajustássemos o desempenho médio de cada país aquele que seria de esperar se as condições sociais e económicas fossem médias, Portugal melhorava substancialmente a sua posição relativamente aos restantes participantes.

6. Portugal é, dos países da OCDE, o que tem menos responsáveis de escolas a declarar que monitorizam as aulas dos professores que nelas leccionam. No nosso país, apenas 5% dos alunos da amostra frequentam estabelecimentos de ensino em que tal acontece, enquanto que na OCDE, essa percentagem é, em média, de 61%.
7. Na literacia matemática verificou-se a existência de diferenças entre os perfis pessoais dos alunos com alto nível de literacia e os dos alunos com baixo nível de literacia. As diferenças reportam-se a: i) estratégias de estudo que utilizam; ii) autoconceito, sentimento de auto-eficácia e ansiedade com a matemática; iii) sentido de pertença à escola e atitude face à escola; iv) motivação instrumental para a matemática e interesse por esta disciplina.
8. Na literacia matemática verificou-se a existência de diferenças entre os perfis das famílias dos alunos com alto nível de literacia e os dos alunos com baixo nível de literacia. Os melhores resultados do PISA tendem a identificar-se com alunos provenientes de famílias em que os bens culturais, os recursos educacionais, os níveis de educação e o status profissional são mais elevados.
9. O ano de escolaridade que os alunos frequentam está fortemente associado aos resultados que obtêm em média. Em todos os domínios avaliados os desempenhos médios dos alunos nos 10º e 11º anos de escolaridade são ligeiramente superiores à média correspondente no espaço da OCDE. Os resultados decrescem consistentemente do 9º para o 7º.
 - refª: [Resultados de Portugal : literacia em leitura, matemática e ciências](#)
 - refª: [Literacia Matemática no PISA 2003](#)
 - refª: [Conceitos Fundamentais em Jogo na Avaliação de Resolução de Problemas](#)
 - refª: [Página portuguesa do PISA](#)
- 20ª aula: Reflexão em torno das aulas de estágio assistidas pelos alunos de Metodologia da Matemática.
 - refª: ["Profissão: Professor"](#) por Carlos Fontes
 - refª: ["Profissão: Professor de Matemática - Ano: 1998"](#) por Cristina Loureiro
 - refª: ["Orientar Para Formar - Estágio em Matemática"](#) por Alcino Simões
 - refª: [O professor escreve sua história](#) Histórias contadas por professores
 - Página dos [Estágios de Matemática na Universidade de Coimbra](#)
- 21ª aula: O insucesso escolar em Matemática
 - [O INSUCESSO EM MATEMÁTICA: CONTRIBUTOS DA INVESTIGAÇÃO: 23-24 Abril 2004](#)
 - [Maldita ou bendita matemática...?](#)
 - [O ensino da Matemática em Portugal: Uma prioridade educativa?](#) por João Pedro Ponte
- 22ª aula: Videos com Matemática
 - [The Math in the Movies Page](#)
 - [Flash Films - Association of Teachers of Mathematics](#)

Antigamente, a Escola... (I)

Por JOÃO BÉNARD DA COSTA

Sexta-feira, 20 de Agosto de 2004

Não, antigamente a escola não era risonha e franca, como no pré-histórico poema ("O Estudante Alsaciano") que, em versão portuguesa, aprendi com a minha Avó e galhardamente recitava - ao que me contaram - empoleirado num banco do Jardim da Estrela, para pasmo dos basbaques e vergonha da minha Mãe, que me surpreendeu, aos cinco anos, em tais preparos. Nessa altura, ainda nem sequer sabia o que escola fosse. Quando soube, talvez usasse muitos adjectivos, mas não seguramente os que a associam ao riso e à franqueza. Mas descansem que não venho para ajustar contas nem para louvar o ensino de outras eras. Também não venho para execuções sumárias. Apenas me lembrei, por razões que mais adiante explicarei, que nunca disse de minha justiça sobre um personagem muito maltratado. Refiro-me ao dr. Sérvulo Correia, reitor do Liceu Camões entre o ano lectivo de 1950-51 e o de 74-75, a que não resistiu.

2 - 1950-51. Eu tinha de 15 para 16 anos e repetia a secção de ciências do 5º ano do liceu (actual 9º). Nesses tempos, até ao dito 5º ano (do 3º ao 5º, leiam do 7º ao 9º, e não vou prosseguir com actualizações), segundo a reforma de 1947 do ministro Pires de Lima (uma entre tantas), havia nove disciplinas, arrumadas entre letras e ciências. Letras: Português, Francês, Inglês e História. Ciências: Geografia, Ciências Naturais, Físico-Químicas, Matemática e Desenho. Se eu era bom aluno em letras, e por isso passei o exame do 5º ano com uma perna às costas e um 19 a História, péssimo era em ciências, sobretudo em Matemática e Desenho. Por isso chumbei e por isso fui condenado a repetir as cinco disciplinas das tais ciências.

Foi um ano negro, sem sombra de dúvida o ano mais negro da minha existência. Tinha grandes "buracos" nos horários (as horas em que os não-repetentes aprendiam letras) e vagueava entre casa e o liceu para repisar "matérias" que odiava. Lágrimas e suspiros? Pouco mais ou menos e não exagero muito. Se a palavra auto-estima já tivesse sido inventada, a minha andava muito por baixo, o que aos 16 anos não se recomenda. O pior de tudo era o Desenho. Por dislexia congénita ou adquirida (havia a tese da fatalidade e a tese da preguiça risonha), eu nunca fui capaz de fazer um traço direito ou uma curva torta. Felizmente, os professores que tive do 1º ao 5º ano (o santo Mendes Costa e a beatíssima Maria Marinho, que, segundo as minhas contas, ainda é capaz de estar viva) sustentavam mais a tese do "coitadinho" do que a do "fiteiro" (tese paterna) e foram-me "passando", como nessa altura se dizia, mesmo se os meus "desenhos geométricos" se pareciam com bilhas "desenhadas à vista" e as bilhas com "geometria no espaço", não desfazendo na geometria e muito menos no espaço.

Tive a sorte (graças à citada reforma) de escapar ao exame do 3º ano, que, quando lá cheguei, retroactivou para o 2º. Mas do exame do 5º não escapei. Como já disse, não escapei mesmo. Foi nesse ano, escolarmente bissexto, que Sérvulo Correia foi nomeado reitor do Camões. Vinha precedido pela fama de "animal feroz" (como diria o eng.º Sócrates) e não a deixou por mãos alheias. O liceu, habituado às cãs brancas e à bonomia de um simpático velhinho coxo, mudou do dia para a noite. Professores e alunos tremiam à passagem daquela cabeça, que, devido a uma acentuada dolicocefalia, logo lhe valeu o cognome de "cabeça de martelo". Eu tinha outras razões para tremer e, como ia pouco ao liceu, não me achei envolvido nas histórias dickensianas que se contavam.

Lá chegou a altura (ah, quando eu contar esse Verão de 51!) de fazer o segundo exame do 5º ano. Prova escrita, que dava direito a dispensar da oral, em caso de média de 16, e dava direito ao chumbo, se a média fosse inferior a 8,5. No ano anterior, ainda tinha chegado à oral. À segunda vez, nem isso. Uns dezitos e uns noveзитos em quatro disciplinas não "taparam" o 2,8 (dois vírgula oito) em Desenho. Poupou-vos à descrição do meu estado de alma diante daquela pauta, em que a seguir ao meu nome estava encarnadamente escrito: "Reprovado". A simples ideia de imaginar (isso mesmo: "ideia de imaginar") que, no ano seguinte, tudo se passaria pela terceira vez punha-me a alma e o corpo em rebugados desfeitos. À minha volta, colegas manifestavam-me a tradicional comiserção lusa: "Coitado do Bénard"; "Chumbou outra vez por causa do Desenho"; "Ele não tem culpa". Por aquelas horas, passou por ali o tal São Mendes Costa. Ao ver-me em tal estado, quis saber a razão. Logo lhe disseram. Passaram mais horas (eu não me atrevia a voltar para casa e a enfrentar a família). Apareceu um contínuo, que, a mando do Senhor Reitor, me disse para ir ao gabinete dele. Lá fui, tão fora de esperar bem. Recebeu-me secamente e ordenou: "Vai para casa e diz ao teu pai que venha cá falar comigo."

falar comigo."

O meu Pai, engripado e de cama, não foi. Pediu à minha Mãe para o fazer. Quando voltámos, o Senhor Reitor recebeu-nos logo. Não mandou sentar a Mãe. De pé, disse-lhe: "O professor de Desenho do seu filho informou-me da nota dele e da reprovação. Se ele é inapto, o encarregado de educação devia ter pedido dispensa dessa disciplina, como está previsto na lei. Agora, tudo é mais difícil. Mas ainda se pode tentar. O marido de V. Exa. deverá fazer um requerimento ao Senhor Ministro da Educação, solicitando a anulação da prova, o que lhe permitirá ter acesso ao exame oral. Não prometo nada - a decisão não me compete -, mas a informação que darei, com base no que o professor de Desenho me transmitiu, será favorável."

Transmitida a mensagem, o meu Pai mostrou-se muito céptico. Mas o prazo para recurso era curto e tentou. Fui levado a várias consultas médicas, onde ouvi o meu Pai fazer dele a tese do "coitadinho" (muito me espantou essa conversão, mas o amor de pai obriga a muito) enquanto eu me sumia pelo chão abaixo a cada novo exame, teórico e prático. Fez-se o requerimento. Na dúvida do despacho, uma prima minha, bastante mais velha e que cursava

Económico-Financeiras, deu-me explicações intensivas de Físico-Químicas e Matemática, num Julho ardente e inquietíssimo. Um belo dia, chegou a notícia. O ministro deferira o requerimento. Já em Agosto, "fui à oral". O mês de férias, que a minha prima sacrificou a cultivar-me minimamente em matérias em que eu era ignaro, fez o resto do milagre, bendita seja ela! Fui aprovado com 10 valores e deficiência a Matemática, o que era irrelevante para quem, obviamente, se destinava às letras. Dois anos depois, concluí o Liceu (no Pedro Nunes) com média final de 18.

3 - Na altura, abençoei o Prof. Mendes Costa, o Ministro e a Prima. Tinha toda a razão. Mas esqueci-me de abençoar o Reitor. Só alguns anos depois (quando eu próprio vivi, do outro lado, a época dos exames e o trabalho imenso que ela implicava para os examinadores) me dei conta do que o gesto dele teve de extraordinário. Em vez de juntar mais uma reprovação às estatísticas, com um aluno que nem sequer era aluno dele e que ele nem sequer conhecia, arrancou-me à autocomiseração e às lágrimas quentes, accionou os mecanismos legais que tanto os meus Pais como eu desconhecíamos, venceu o cepticismo paterno e anulou os efeitos devastadores de uma segunda reprovação consecutiva num adolescente em crise. Tivesse ele sido indiferente (como era legítimo e normal que fosse) e talvez o meu futuro fosse bem diferente.

Tive ocasião de lho dizer. Dez anos depois desse trágico 51, voltei ao Camões, como professor de História, Filosofia e Organização Política e Administrativa da Nação. Professor eventual, ou seja, fora do quadro. Ensinei nessa qualidade três anos lectivos.

Poucos meses depois de começar, dava uma aula de História e estava virado de costas para a porta aberta, ouvi um silêncio pesadíssimo e vi os alunos todos a levantar-se como se um alfinete lhes picasse o rabo. Entrara o Senhor Reitor. Não disse nem bons dias nem boas tardes. Avançou para a "minha" secretária, sentou-se, mandou sentar os alunos e disse-me: "Sr. Dr., faça favor de continuar a dar a aula." Eu continuei. Lembro-me que era sobre as origens do cristianismo (3º ano, pois). Quando tocou a sineta, mandou sair os alunos e disse-me para ficar. Não falarei de piropos, que é uma palavra que vai mal com ele. Mas raras vezes ouvi elogios tão expressivos. Daí para diante, tomou-me sob a sua protecção. Um dia, levou mesmo a afectividade mais longe e justificou a sua imagem. Não tinha - disse-me - qualquer prazer em fazer de "papão do liceu", mas entendia que aquele era o único modo de lidar com rapazes que os pais, na sua maioria, não seguiam e com professores genericamente incompetentes. Discuti com ele abertamente e ele ouviu-me com atenção. Lembro-me que acentuou duas vezes a expressão "formar os melhores".

Num desses anos, propus-lhe dar, em regime aberto, depois do horário normal, um curso de iniciação ao cinema, já nessa altura paixão minha. Não suponho que fosse cinéfilo ou sequer que fosse ao cinema. Mas sem hesitação me autorizou e seguiu, interessadíssimo, os resultados.

Doutra vez, pôs-me uma reserva: nas minhas aulas, tinha notado pouca participação dos alunos. Vinda de quem vinha, a observação espantou-me. Disse-lhe que era o meu estilo e que, além disso, na presença dele, o acentuava, pois que os ditos ficavam manifestamente muito pouco à vontade. Pareceu-me perceber, embora me notasse que, com a minha idade (eu tinha vinte e tal anos), devia estar mais aberto à "pedagogia moderna".

Em 1964, resolvi trocar o liceu por outra oferta de emprego, aparentemente mais tentadora. Falei com ele e só me encorajou. "Com as condições do ensino de hoje, uma pessoa como o Sr. Dr. deve seguir outros caminhos."

Já fora do liceu, tive ocasião de lhe escrever uma carta a contar a história do exame do 5º ano, que ele evidentemente esquecera. Respondeu-me emocionado: "A sua carta chegou num momento muito difícil da minha vida e foi um bálsamo."

Um ano depois, estava de novo a bater-lhe à porta. Muito mais aberto à "pedagogia moderna" (hoje, acho que escancaradamente aberto), propunha-lhe voltar para fazer experiências de pedagogia não-directiva, à Rogers. Acreditem ou não, disse-me logo que sim.

Só que nesse ano a PIDE mudou as regras para a admissão de eventuais. Até aí - o que me valera -, os contratos destes, contratos a prazo e sem garantia de quaisquer direitos, não iam ao visto prévio da polícia política. Nesse ano, passaram a ir. A informação era fortemente negativa. Chamou-me, comunicou-me e disse-me que iria ele próprio à PIDE, para os tentar demover. Aí falhou. A experiência não-directiva vim a fazê-la no Colégio Moderno do Dr. Mário Soares. Deus escreve direito por linhas tortas.

4 - Nunca mais o vi.

Mas, de cada vez que leio, em memórias de ex-alunos dos anos 50, 60 e 70, o retrato de Sérvulo Correia como arquétipo do reitor policial ou do reitor fascista, que transformou o Camões numa prisão, penso no dever de contar esta história. Chegou a altura.

Por "razões que mais adiante explicarei"? Sem mais espaço, ficam para a próxima crónica. Se nunca aprendi a ser "não-directivo", também nunca aprendi a ser sintético.

Escritor

[OUTROS TÍTULOS EM ESPAÇO PÚBLICO](#)

[EDITORIAL](#)

[O futuro do ensino superior](#)

[OPINIÃO](#)

[Antigamente, a escola... \(I\)](#)

[José Blanco](#)

[o fio do horizonte](#)

[Igualdade de homens e mulheres](#)

[publico.pt publiconline última hora desporto guia do lazer bd cinecartaz tvzine](#)

[fotojornalismo calvin bartoon tempo serviço público copyright publicidade ficha](#)

[técnica](#)

© 2000 PÚBLICO Comunicação Social, SA

Emails: [Direcção Editorial](#) - [Webmaster](#) - [Publicidade](#)

A EXPERIÊNCIA MATEMÁTICA

Philip Davis

Reuben Hersch

CIÊNCIA ABERTA

Preço de Capa: 22.00 EURO

Desconto: 10%

Preço Online: 19.80 EURO

Nº de páginas: 404

Ano de Edição: 1995

ISBN: 972-662-427-1

Este livro encontra-se esgotado

Uma visão brilhante e fundamentada do desenvolvimento da matemática [...]
Magnífico.

Consegue comunicar ao leitor comum a beleza e o fascínio pelo tema.

New York Times

Uma verdadeira jóia.

Uma obra-prima do nosso tempo.

American Mathematical Monthly

O riquíssimo e diversificado mundo da matemática é apresentado neste livro: a sua história e filosofia, a sua estética e pedagogia - mesmo as personalidades dos matemáticos são apresentadas em belíssimos sketches biográficos pontuados por acessíveis e sólidas discussões das obras [...].

Um livro verdadeiramente maravilhoso.

The New Yorker

De repente, somos transportados para outro mundo - um mundo novo e diferente, mas ao mesmo tempo estranhamente familiar.

Matemáticos ilustres, problemas famosos e problemas curiosos; as ideias, a história, a descoberta, a filosofia: a Experiência Matemática inspira-nos o entusiasmo de pensar, de respirar, de viver a matemática.

Não é um livro de divulgação: é uma obra de arte única.

DOUTOR JORGE BUESCU, Instituto Superior Técnico, revisor científico de A Experiência Matemática

PHIPLIP J. DAVIS é professor de Matemática Aplicada na Brown University.

REUBEN HERSCH é professor de Matemática na Univesidade de New Mexico em Albuquerque.

Do Mathematics Exist?

There are basically two mainstream schools of thought, (Neo-) Platonism and Formalism, and a third somewhat heretical view, Constructivism.

According to **Neo-Platonists**, mathematics exist independent of human quest, so they are in fact discovered, not invented. Even the most abstract mathematical objects are real and invariable, immaterial of course and in no way related to physical existence, space and time, but anyway they do exist in a non-objective world. For a Neo-Platonist, there is an answer to Cantor's Continuum Hypothesis, only we do not have the means to obtain it, that is, we do not understand real numbers sufficiently.

A strong argument in favor of the Neo-Platonic view is the "unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences" (Eugene Wigner, Nobel prize-winning physicist). Another one is given by the Russian mathematician I. Shafarevitch:

"History of mathematics has known many occasions where a discovery made by a scientist remains unknown until somebody else makes it again later, with astonishing preciseness. In the letter that Galois wrote the day before his fatal duel, he reached some conclusions of extreme importance in the study of integrals of algebraic functions. More than twenty years later, Riemann, undoubtedly unaware of Galois' letter, re-discovered and proved the same propositions. Another example: after Lobachevski and Bolyai built the foundations of non-Euclidean geometry independent of each other, it appeared that two other mathematicians, Gauss and Schweikart, had both reached the same conclusions ten years earlier, also working independently. There is a strange feeling in reading exactly the same ideas, as coming from one mind, in the work of four scientists who studied the subject alone" (talk given to the Göttingen Academy of Sciences, 1973)

For **Formalists** on the other, mathematical objects do not exist. Mathematics consist of symbols, axioms/sentences composed of such symbols and rules to transform sentences into others (e.g. theorems), but none of these has any particular meaning. Mathematics is therefore a humanly constructed language devised by human beings for definite ends prescribed by themselves.

Formalists often speak in terms of Neo-Platonic real objects, but only for reasons of convenience. For a Formalist, the Cantor's Continuum Hypothesis is meaningless for there is no such a thing as a complete understanding of the real numbers. As long as we follow the strict rules of transforming series of symbols into other series of symbols, there is no point in asking whether we approach reality or not, because there is no reality.

Constructivists take the extreme view that if something cannot be constructed in a finite number of steps it does not exist. The leader was L.E.J. Brouwer who even devised a famous counter-example to show that the trichotomy law for real numbers (every real number is either negative, zero or positive) is not true. The argument involved a strictly defined but impossible calculation with Pi the result of which would define in turn the sign of a related number. Constructivists would dispose all questions about infinity on these grounds.

Links on the Logic and Philosophy of Mathematics can be found at the University of Waterloo/ Department of Philosophy site [here](#)

A responsabilidade dos matemáticos na busca da paz

Ubiratan D'Ambrosio ^[1]

O foco deste trabalho é a questão da PAZ nas suas múltiplas dimensões [PAZ INTERIOR, PAZ SOCIAL, PAZ AMBIENTAL, PAZ MILITAR]. O pressuposto é que a maioria dos seres humana deseja a paz. A pergunta: qual o papel da Matemática e da Educação Matemática na obtenção da paz?

Dois eminentes matemáticos, Albert Einstein e Bertrand Russell, elaboraram, em 1955, um manifesto, que foi endossado por outros cientistas detentores do Premio Nobel, provenientes de vários países. O documento ficou conhecido como o Manifesto Pugwash, e nele se lê:

"Esqueçam-se de tudo e lembrem-se da humanidade". ^[2]

Procuro nas minhas propostas de Educação Matemática seguir os ensinamentos desses dois grandes mestres, que nos legaram não só muito de Matemática, mas, sobretudo de humanidade.

O ano 2000 foi declarado, pela UNESCO, Ano Internacional da Cultura da Paz. ^[3] Coincidentemente, a União Matemática Internacional declarou 2000 o Ano Internacional da Matemática. ^[4]

A questão que se coloca, naturalmente, é a conciliação de dois universais: PAZ e MATEMÁTICA.

Passamos o ano 2000 com grandes festividades, fomos ameaçados pelo *bug* do milênio, produto de poderosos vírus construídos com sofisticada matemática computacional, escapamos desse *bug* graças a poderosos antivírus desenvolvidos graças à mesma matemática, passamos pelo ano 2001, que terminou sob o impacto dos ataques terroristas nos Estados Unidos e dos ataques de retaliação no Afeganistão. Todos realizados com precisão matemática. E agora, em 2003, testemunhamos uma guerra com conseqüências imprevisíveis e que se caracterizou pela utilização de uma alta tecnologia, desenvolvida graças ao extraordinário avanço da matemática aplicada a diversas ciências. E, nos países eufemisticamente chamados emergentes, as contradições de uma economia baseada em alta matemática, penalizam as nossas sociedades. ^[5]

Há uma contradição evidente: esses atos abomináveis só podem ser idealizados e executados graças a um elaborado instrumental matemático. E os que idealizam, planejam e executam esses atos têm reconhecida competência matemática.

Obviamente, Matemática e Paz se estranham. Somos levados a concluir que o fato de a humanidade ter construído um corpo de conhecimentos tão elaborado quanto a Matemática, é ofuscado pelo fato de a humanidade ter se distanciado de tal maneira da Paz. Na busca da Paz, não basta fazer uma boa Matemática, mas deve-se fazer uma Matemática impregnada de valores éticos, que é um conceito, para muitos, desprovido de significado.

O desafio é dar sentido ao conceito de Ética Matemática. Para isso é necessário um reexame da História da Matemática, procurando entender quando, onde, como e porque, a Matemática e a Ética se distanciaram. ^[6]

Acredito ser essa uma questão da maior importância nas propostas de Educação para a Paz. ^[7]

O paradigma dominante, responsável por desigualdade e exclusão, por injustiça e opressão, está sendo questionado e busca-se um novo

paradigma, ou trans-paradigma, ainda mal definido, mas que seja capaz de proporcionar uma vida digna para toda a humanidade. A educação é a estratégia para evitar que a desordem social e a corrupção institucional prevaleçam nesse difícil momento de transição. Uma educação voltada para a PAZ TOTAL. ^[8]

Atingir PAZ TOTAL é também a única justificativa de qualquer esforço para o avanço científico e tecnológico, e deveria ser o substrato de todo discurso sobre Educação e sobre o fazer científico e tecnológico, particularmente o fazer matemático. Muitos ainda questionam:

"Mas o que tem isso a ver com a Matemática e com a Educação Matemática?"

Eu respondo:

"Tem tudo a ver."

Neste trabalho vou elaborar sobre essa afirmação.

Um Educador Matemático deve utilizar aquilo que aprendeu como Matemático para realizar a sua missão de Educador. Portanto, um Educador Matemático é um educador que tem Matemática como sua área de competência e seu instrumento de ação, não um matemático que utiliza a Educação para a divulgação de habilidades e competências matemáticas.

Ciência e conhecimento devem, portanto, estar subordinadas ao humanismo característico do educador.

Em termos muito claros e diretos: o aluno é mais importante que programas e conteúdos. Se o objetivo é Paz, a Educação é a estratégia mais importante para levar o indivíduo a estar em paz consigo mesmo e com o seu entorno social, cultural e natural e a se localizar numa realidade cósmica.

Eu poderia sintetizar meu posicionamento dizendo que só se justifica insistirmos em Educação para todos se for possível conseguir, por meio dela, melhor qualidade de vida e maior dignidade da humanidade como um todo, preservando a diversidade mas eliminando a desigualdade discriminatória, dando, assim, origem a uma nova organização da sociedade.

A dignidade de cada indivíduo se manifesta no encontro com si próprio. Portanto atingir o estado de Paz Interior é uma prioridade. Atingir o estado de paz interior é difícil, sobretudo devido a todos os problemas que enfrentamos no dia-a-dia, particularmente no relacionamento com o outro. Será que o outro estará tendo dificuldades em atingir o estado de sua Paz Interior? Muitas vezes vemos que o outro está tendo problemas que resultam de dificuldades materiais, como falta de segurança, falta de emprego, falta de salário, muitas vezes até mesmo falta de casa e de comida. A solidariedade com o próximo é a primeira manifestação de nos sentirmos parte de uma sociedade. A Paz Social será um estado em que essas situações não ocorrem. E com certeza vem novamente a pergunta "Mas o que tem a Matemática a ver com isso?". A resposta a essa questão pode ser encontrada a partir de uma análise da História da Matemática integrada na História da Humanidade. ^[9]

Também alguns não percebem o quanto a Paz Ambiental tem a ver com a Matemática, que é sempre pensada como aplicada ao desenvolvimento e ao progresso. Lembro que a ciência moderna, que repousa em grande parte na Matemática, nos dá instrumentos notáveis para um bom relacionamento com a natureza, mas também poderosos instrumentos de destruição dessa mesma natureza. A Educação Ambiental necessita muita

Atingir PAZ TOTAL deve ser a utopia de todo ser humano. Essa é a essência de ser humano. É o ser [substantivo] humano procurando ser [verbo] humano. Esse é o verdadeiro sentido de humanidade, resultado da chamada Era da Consciência. ^[11]

Estamos vivendo uma sociedade em transição e a busca de novos paradigmas parece estar dominando o pensamento atual, muito especialmente o pensamento científico. Como diz Boaventura de Sousa Santos na sua excelente rejeição da razão cínica dominante,

“construir, na verdade, uma utopia tão pragmática quanto o próprio senso comum, não é uma tarefa fácil, nem uma tarefa que alguma vez possa concluir-se. É este reconhecimento, à partida, da infinitude que faz desta tarefa uma tarefa verdadeiramente digna dos humanos.” ^[12]

Educação Matemática e Paz

Minha proposta é fazer uma Educação para a Paz e, em particular, uma Educação Matemática para a Paz.

Muitos continuaram intrigados: "Mas como relacionar trinômio de 2º grau com Paz?". É provável que esses mesmos indivíduos costumam ensinar trinômio de 2º grau dando como exemplo a trajetória de um projétil de canhão. Mas estou quase certo que não dizem, nem sequer sugerem que aquele belíssimo instrumental matemático, que é o trinômio de 2º grau, é o que dá a certos indivíduos – artilheiros profissionais, que provavelmente foram os melhores alunos de Matemática da sua turma – a capacidade de dispararem uma bomba mortífera de um canhão para atingir uma população de gente, de seres humanos, carne e osso, emoções e desejos, e matá-los, destruir suas casas e templos, destruir árvores e animais que estejam por perto, poluir qualquer lagoa ou rio que esteja nos arredores. A mensagem implícita acaba sendo: aprenda bem o trinômio do 2º grau e você será capaz de fazer tudo isso. Somente quem faz um bom curso de Matemática tem suficiente base teórica para apontar canhões sobre populações.

Claro, muitos dirão, como já disseram: "Mas isso é um discurso demagógico. Essa destruição horrível só se fará quando necessário. E é importante que nossos jovens estejam preparados para o necessário." E os defensores de um conteúdo dominante dizem que a matemática ensinada é essencial para essa preparação. Milhões, durante toda a história da humanidade, têm acreditado na necessidade de se preparar para uma possível agressão, inventando meios mais "eficazes" de, em nome de defesa, agredir, o que têm causado enormes perdas materiais e morais. ^[13]

Seria fundamental lembrar que os interessados nesse estado de coisas justificam dizendo ser isso necessário porque o alvo da nossa bomba destruidora é um indivíduo que não professa o nosso credo religioso, que não é do nosso partido político, que não segue nosso modelo econômico de propriedade e produção, que não tem nossa cor de pele ou nossa língua, enfim o alvo de nossa bomba destruidora é um indivíduo que é diferente. Tem sido e continua sendo esse o conceito dominante nas relações sociais e políticas: ver, no diferente, um agressor em potencial.

O trinômio de 2º grau serviu como exemplo para argumentar. A importância tão feia que destacamos de uma coisa tão linda como o trinômio do 2º grau merece ser comentada. Não se propõe eliminar o trinômio de 2º grau dos programas, mas sim que se utilize algum tempo

para mostrar, criticamente, as coisas feias que se tem feito com ele e destacar as coisas lindas que se pode fazer com ele.

A geração, organização intelectual e social e a difusão do conhecimento, dão o quadro geral no qual procuro desenvolver minhas propostas específicas para a educação matemática. ^[14]

O Programa Etnomatemática

Considero importante evitar que Etnomatemática seja confundida com uma nova disciplina ou seja vista como uma outra matemática. O Programa Etnomatemática, que não se pode confundir com o estudo etnográfico das idéias matemáticas, surgiu, nesta concepção, a partir de meados da década de 80. ^[15] Na sua essência, o Programa Etnomatemática é o reconhecimento que o conhecimento é dinâmico, em permanente elaboração e re-elaboração. Assim, evitando as posições de Karl Popper e de Thomas Kuhn e situando-me mais próximo a Imre Lakatos, falo em Etnomatemática como um programa de pesquisa sobre a geração, organização intelectual, organização social e difusão do conhecimento. Poder-se-ia dizer um programa interdisciplinar abarcando o que constitui o domínio das chamadas ciências da cognição, da epistemologia, da história, da sociologia e da difusão.

Metodologicamente, esse programa reconhece que, na sua aventura enquanto espécie planetária, o homem (espécie *homo sapiens sapiens*), bem como as demais espécies de homínídeos, reconhecidas desde mais de 5 milhões de anos antes do presente, tem seu comportamento alimentado pela aquisição de conhecimento, de fazer(es) e de saber(es), que lhes permitiram sobreviver e transcender através de maneiras, de modos, de técnicas ou mesmo de artes [*techné* ou *tica*] de explicar, de conhecer, de entender, de lidar com, de conviver com [*matema*] a realidade natural e sócio-cultural [*etno*] na qual a espécie está inserida. Ao utilizar as raízes *tica*, *matema* e *etno*, cometo um verdadeiro abuso etimológico, mas que me permite construir e utilizar, num sentido conceitualmente preciso, a palavra Etnomatemática.

Naturalmente, em todas as culturas e em todos os tempos, o conhecimento, que é gerado pela necessidade de uma resposta a problemas e situações distintas, está subordinado a um contexto natural, social e cultural.

Indivíduos e povos têm, ao longo de suas existências e ao longo da história, criado e desenvolvido instrumentos de reflexão, de observação, instrumentos teóricos e, associados a esses, técnicas, habilidades (artes, técnicas, *techné*, *ticas*) para explicar, entender, conhecer, aprender para saber e fazer como resposta a necessidades de sobrevivência e de transcendência (*matema*), em ambientes naturais, sociais e culturais (*etnos*) os mais diversos. Daí chamarmos o exposto acima de Programa Etnomatemática.

A palavra Etnomatemática sugere o corpus de conhecimento reconhecido academicamente como Matemática. De fato, em todas as culturas encontramos formas de conhecer associadas a processos de comparação, organização, classificação, contagem, medição, inferência (que são relacionadas e hoje integradas no que se chama Matemática), geralmente mesclados ou dificilmente distinguíveis de outras formas de conhecer, hoje definidas como Arte, Religião, Música, Técnicas, Ciências. Em todos os tempos e em todas as culturas, Matemática, Artes, Religião, Música, Técnicas, Ciências foram desenvolvidas com a mesma finalidade de explicar, de conhecer, de aprender, de saber/fazer e de predizer o futuro

(artes divinatórias). Todas aparecem, num primeiro estágio da história da humanidade e da vida de cada um de nós, indistinguíveis como formas de conhecimento.

A dinâmica cultural

No encontro de indivíduos e de grupos, há um processo de interação dinâmica, cujo resultado pode ser o predomínio de uma forma sobre outra, algumas vezes a substituição de uma forma por outra e mesmo a supressão e a eliminação total de alguma forma. Mas, na maioria dos casos, o resultado é a geração de novas formas culturais.

Na dinâmica do encontro, são fortes as relações entre indivíduos de uma mesma cultura (intraculturais) e, sobretudo, as relações entre indivíduos de culturas distintas (interculturais). Nas relações intra e interculturais reside o potencial criativo da espécie. Assim como a biodiversidade representa o caminho para o surgimento de novas espécies, na diversidade cultural reside o potencial criativo da humanidade.

Na Educação, tem havido o reconhecimento da importância das relações interculturais. Mas, lamentavelmente, ainda há relutância no reconhecimento das relações intraculturais. Ainda se insiste em colocar crianças em séries de acordo com idade, em oferecer o mesmo currículo numa mesma série, chegando ao absurdo de se propor currículos nacionais. E, ainda, comete-se o absurdo maior de se avaliar grupos de indivíduos com testes padronizados. Trata-se, efetivamente, de uma tentativa de pasteurizar as novas gerações!

A pluralidade dos meios de comunicação de massa, facilitada pelos transportes, levou as relações interculturais a dimensões verdadeiramente planetárias. Estamos vivendo um período em que os meios de captar informação e o processamento da informação de cada indivíduo encontram nas comunicações e na informática instrumentos auxiliares de alcance inimaginável em outros tempos. A interação entre indivíduos também encontra, na teleinformática, um grande potencial, ainda difícil de aquilatar, de gerar ações comuns.

Inicia-se assim uma nova era que abre enormes possibilidades de comportamento e de conhecimento planetários, com resultados sem precedentes para o entendimento e harmonia de toda a humanidade. Não a homogeneização biológica ou cultural da espécie, mas a convivência harmoniosa dos diferentes, através de uma ética de respeito mútuo, solidariedade e cooperação.

Naturalmente, sempre existiram maneiras diferentes de explicações, de entendimentos, de lidar e conviver com a realidade, que agora são notadas com maior evidência. Graças aos novos meios de comunicação e transporte, cria-se a necessidade de um comportamento que transcenda mesmo as novas formas culturais. Eventualmente o tão desejado livre arbítrio, próprio de ser humano, poderá se manifestar num modelo de transculturalidade que permitirá a cada ser humano atingir a sua plenitude. Um modelo adequado para se facilitar esse novo estágio na evolução da nossa espécie é a Educação Multicultural, que vem sendo adotada nos sistemas educacionais de todo o mundo.

Sabemos que no momento há mais de 200 estados e aproximadamente 6.000 nações indígenas, com uma população totalizando entre 10%-15% da população total do mundo. Embora não seja o meu objetivo discutir Educação Indígena, os aportes de especialistas na área têm sido muito importantes para se entender como a educação pode ser um instrumento

que reforça os mecanismos de exclusão social.

É importante lembrar que praticamente todos os países adotaram a Declaração de Nova Delhi (16 de dezembro de 1993), que é explícita ao reconhecer que

"a educação é o instrumento preeminente da promoção dos valores humanos universais, da qualidade dos recursos humanos e do respeito pela diversidade cultural" (2.2)

e que

"os conteúdos e métodos de educação precisam ser desenvolvidos para servir às necessidades básicas de aprendizagem dos indivíduos e das sociedades, proporcionando-lhes o poder de enfrentar seus problemas mais urgentes – combate à pobreza, aumento da produtividade, melhora das condições de vida e proteção ao meio ambiente – e permitindo que assumam seu papel por direito na construção de sociedades democráticas e no enriquecimento de sua herança cultural" (2.4).

Nada poderia ser mais claro nesta declaração que o reconhecimento da subordinação dos conteúdos programáticos à diversidade cultural.

Igualmente, o reconhecimento de uma variedade de estilos de aprendizagem está implícito no apelo ao desenvolvimento de novas metodologias.

Dentre os vários questionamentos que levam à preservação de identidades nacionais, muitas se referem ao conceito de conhecimento e às práticas associadas a ele. Talvez a mais importante a se destacar seja a percepção de uma dicotomia entre saber e fazer, que prevalece no mundo chamado "civilizado" e que é própria dos paradigmas da ciência moderna, como criada por Descartes, Newton e outros.

Essencialmente, essas considerações determinam uma enorme flexibilidade tanto na seleção de conteúdos quanto na metodologia.

A ciência moderna, que surgiu ao mesmo tempo e sob grande influência das grandes navegações, da conquista e da colonização, impôs-se como uma forma de conhecimento racional, originado das culturas mediterrâneas, e como o substrato de uma tecnologia eficiente e fascinante. Como conseqüência, a partir das nações centrais definiram-se conceituações estruturadas e dicotômicas do saber [conhecimento] e do fazer [habilidades].

Etnomatemática e matemática

A abordagem a distintas formas de conhecer é a essência do Programa Etnomatemática. Repito, o que já foi dito acima, que, diferentemente do que sugere o nome, Etnomatemática não é apenas o estudo de "matemáticas das diversas etnias". A própria composição da palavra etnomatemática significa que há várias maneiras, técnicas, habilidades de explicar, de entender, de lidar e de conviver com distintos contextos naturais e sócio-econômicos da realidade.

A disciplina denominada Matemática é, na verdade, uma Etnomatemática que se originou e se desenvolveu na Europa, tendo recebido algumas contribuições das civilizações indiana e islâmica, e que chegou à forma atual nos séculos XV e XVI, sendo, a partir de então, levada e imposta a todo o mundo. Hoje, essa matemática adquire um caráter de universalidade, sobretudo devido ao predomínio da ciência e da tecnologia modernas, que foram desenvolvidas, a partir do século XVII, na Europa, e

que são dependentes dela.

Essa universalização é um exemplo do processo de globalização que estamos testemunhando em todas as atividades e áreas de conhecimento.

Falava-se muito das multinacionais. Hoje, as multinacionais são, na verdade, empresas globais, para as quais não é possível identificar uma nação ou grupo nacional dominante.

Essa idéia de globalização já começa a se revelar no início do cristianismo e do islamismo. Diferentemente do judaísmo, do qual essas religiões se originaram, bem como de inúmeras outras crenças nas quais há um povo eleito, o cristianismo e o islamismo são essencialmente religiões de conversão de toda humanidade à mesma fé, com o objetivo de subordinar todo o planeta a uma mesma igreja. Isso fica evidente nos processos de expansão do Império Romano cristianizado e do Islão.

O processo de globalização da fé cristã se aproxima do seu ideal com as grandes navegações. O catecismo, elemento fundamental da conversão, é levado a todo o mundo. Assim como o cristianismo é um produto do Império Romano levado, com o colonialismo, a um caráter de universalidade, também o são a matemática, a ciência e a tecnologia.

No processo de expansão, o cristianismo foi se modificando, absorvendo elementos da cultura subordinada e produzindo variantes notáveis do cristianismo original do colonizador. O mesmo se passou com a linguagem, com a culinária e com os costumes. Esperar-se-ia que, igualmente, as formas de explicar, conhecer, lidar, conviver com a realidade sócio-cultural e natural, obviamente distintas de região para região, e que são as razões de ser da matemática, das ciências e da tecnologia, também passassem por esse processo de "aclimatação", resultado de uma dinâmica cultural. No entanto, isso não se deu, e não se dá, e esses ramos do conhecimento adquiriram um caráter de absoluto universal. Não admitem variações ou qualquer tipo de relativismo. Isso se incorporou até no dito popular "tão certo quanto dois mais dois são quatro". Não se discute o fato, mas sua contextualização na forma de uma construção simbólica que é ancorada em todo um passado cultural.

A Matemática tem sido conceituada como a ciência dos números e das formas, das relações e das medidas, das inferências, e as suas características apontam para precisão, rigor, exatidão. Os grandes heróis da Matemática, isto é, aqueles indivíduos historicamente apontados como responsáveis pelo avanço e consolidação dessa ciência, são identificados na Antigüidade grega e posteriormente, na Idade Moderna, nos países centrais da Europa, sobretudo Grécia, Itália, Inglaterra, França, Alemanha. Os nomes mais lembrados são Tales, Pitágoras, Euclides, Descartes, Galileo, Newton, Leibniz, Hilbert, Einstein, Hawkings. São idéias originadas por uma elite intelectual dos povos ao Norte do Mediterrâneo.

Portanto, falar dessa Matemática em ambientes culturais diversificados, sobretudo em se tratando de nativos ou afro-americanos ou outros não europeus, de trabalhadores oprimidos e de classes marginalizadas, além de trazer a lembrança do conquistador, do escravista, enfim do dominador, também se refere a uma forma de conhecimento que foi construído por ele, dominador, e da qual ele se serviu, e se serve, para exercer seu domínio. Mas isso também se passa com calças *jeans*, que se mescla com as vestes tradicionais, ou com a *coca-cola*, que aparece como uma opção para o guaraná, ainda preferido por muitos, ou com o *rap*, que está se popularizando e, junto com o samba, produzindo um novo ritmo. As formas tradicionais permanecem e se modificam pela presença das novas. A religião e a língua do dominador se modificam ao incorporar os mitos, as

tradições, as expressões, os jargões, do dominado.

A Matemática europeia, com seu caráter de infalibilidade, de rigor, de precisão, firmou sua presença, excluindo outras formas de pensamento, principalmente pelo fato de um instrumento essencial e poderoso no mundo moderno. Na verdade, ser racional é identificado com dominar a Matemática. A Matemática se apresenta como um deus mais sábio, mais milagroso e mais poderoso que as divindades e outras tradições culturais.

A historicidade, tanto do indivíduo dominado quanto de sua cultura, é eliminada. Sua realidade é substituída por uma situação que é idealizada para satisfazer os objetivos do dominador. O aluno tem suas raízes culturais, que é parte de sua identidade, eliminadas. Essa eliminação produz o excluído.

Isto é evidenciado, de maneira trágica, na Educação Indígena. O índio passa pelo processo educacional e não é mais índio... Mas, tampouco branco. Sem dúvida, a elevada ocorrência de suicídios entre as populações indígenas está associada a isso. Uma situação semelhante se passa com as classes populares, mesmo não sendo índios. Mas principalmente com crianças, adolescentes e mesmo adultos, ao se aproximarem de uma escola. Se entre os indígenas, a consequência é o alto índice de suicídio, entre essas crianças, adolescentes, e mesmo adultos, a consequência é uma atitude de descrença e de alienação, que muitas vezes se manifesta no recurso a drogas e à violência.

Essa situação é notada em todas as categorias de saber/fazer próprios da cultura do dominador, com relação a todos os povos que mostram uma identidade cultural.

Naturalmente, há um importante componente político nessas reflexões. Apesar de muitos dizerem que isso é jargão ultrapassado de esquerda, é claro que continuam a existir as classes dominantes e subordinadas, tanto nos países centrais quanto nos periféricos.

Faz sentido, portanto, falarmos de uma "matemática dominante", que é um instrumento desenvolvido nos países centrais e muitas vezes utilizado como instrumento de dominação. Essa matemática e os que a dominam, apresentam-se com postura de superioridade, com o poder de deslocar, e mesmo eliminar, a "matemática do dia-a-dia" ou "matemática espontânea" do dominado. O mesmo se dá com outras formas culturais. Particularmente interessantes são os estudos de Basil Bernstein sobre a linguagem. E são muito conhecidas as situações ligadas ao comportamento, à medicina, à arte e à religião. Todas essas manifestações são referidas como cultura popular. Naturalmente, embora esteja viva e sendo praticada, a cultura popular é, muitas vezes, ignorada, rejeitada, reprimida e, certamente, menosprezada. Isto tem como efeito desencorajar e mesmo eliminar o povo como produtor e como entidade cultural.

Muito interessante o projeto *REPOhistory: repossessing history*, desenvolvido por um grupo de artistas que produzem arte para o povo, baseada em *leituras multiculturais de narrativas perdidas, esquecidas ou eliminadas*, com a finalidade de usar a história para comentar sobre temas sociais contemporâneos. Recentemente, ao escolher o tema *Sangue*, incorporaram os conhecimentos científicos de *AIDS* à cultura popular. Esta é uma excelente ilustração do que é dinâmica cultural. ^[16]

Pode-se dar outro importante exemplo de dinâmica cultural na Matemática. Em particular na Geometria e na Aritmética, notam-se violentas contradições. Por exemplo, a geometria do povo, dos balões e dos papagaios, é colorida. A geometria teórica, desde sua origem grega,

eliminou a cor. Muitos leitores a essa altura estarão confusos. Estarão dizendo: mas o que isso tem a ver? Papagaios e balões? Cores?

Tem tudo a ver, pois são justamente essas as primeiras e mais notáveis experiências geométricas. E a reaproximação de Arte e Geometria dificilmente será alcançada sem o mediador cor. Na Aritmética, o atributo do número na quantificação é essencial. Duas laranjas e dois cavalos são "dois" distintos. Chegar ao "dois" sem qualificativo, abstrato, assim como à Geometria sem cores, talvez sejam os pontos cruciais na passagem para uma Matemática teórica. O cuidado com essa passagem e trabalhar adequadamente esse momento talvez sintetizem tudo que há de importante nos programas de Matemática Elementar. O resto daquilo que constitui os programas são técnicas que pouco a poucos podem ir se mostrando interessantes e necessárias.

Não se questiona a conveniência e mesmo a necessidade de ensinar aos dominados a língua, a matemática, a medicina, as leis do dominador, sejam esses índios e brancos, pobres e ricos, crianças e adultos. Chegamos a uma estrutura de sociedade e a conceitos de cultura, de nação e de soberania que impõem essa necessidade. O que se questiona é a agressão à dignidade e à identidade cultural daqueles subordinados a essa estrutura.

A responsabilidade maior dos teóricos da educação é alertar para os danos irreversíveis que se podem causar a uma cultura, a um povo e a um indivíduo se o processo for conduzido levemente, muitas vezes até com boa intenção, e fazer propostas para minimizar esses danos. Muitos educadores não se dão conta disso.

O que justifica o papel central das idéias matemáticas em todas as civilizações [etnomatemáticas] é o fato de ela fornecer os instrumentos intelectuais para lidar com situações novas e definir estratégias de ação. Portanto a etnomatemática do indígena serve, é eficiente e adequada para as coisas daquele contexto cultural, naquela sociedade. Não há porque substituí-la. A etnomatemática do branco serve para outras coisas, igualmente muito importantes, propostas pela sociedade moderna e não há como ignorá-la. Pretender que uma seja mais eficiente, mais rigorosa, enfim melhor que a outra é, se removida do contexto, uma questão falsa e falsificadora.

O domínio de duas etnomatemáticas, e possivelmente de outras, obviamente oferece maiores possibilidades de explicações, de entendimentos, de manejo de situações novas, de resolução de problemas. É exatamente isso que se faz na pesquisa matemática -- e na pesquisa em qualquer outro campo do conhecimento. O acesso a um maior número de instrumentos e de técnicas intelectuais dão, quando devidamente contextualizadas, muito maior capacidade de enfrentar situações e de resolver problemas novos, de modelar adequadamente uma situação real para, com esses instrumentos, chegar a uma possível solução ou curso de ação.

Isto é aprendizagem por excelência, isto é, a capacidade de explicar, de apreender e compreender, de enfrentar, criticamente, situações novas. Aprender não é o mero domínio de técnicas, habilidades e muito menos a memorização de algumas explicações e teorias.

A adoção de uma nova postura educacional é, essencialmente, a busca de um novo paradigma de educação que substitua o já desgastado ensino-aprendizagem, que é baseado numa relação obsoleta de causa → efeito. Procura-se uma educação que estimule o desenvolvimento de criatividade desinibida conduzindo a novas formas de relações interculturais. Essas relações caracterizam a educação de massa e proporcionam o espaço

adequado para preservar a diversidade e eliminar a desigualdade discriminatória, dando origem a uma nova organização da sociedade. Fazer da Matemática uma disciplina que preserve a diversidade e elimine a desigualdade discriminatória é a proposta maior de uma Matemática Humanística. A Etnomatemática tem essa característica.

Como conclusão

Essas reflexões constituem o essencial no esforço para se alcançar a Paz nas suas múltiplas dimensões. A violação dessa Paz está associada à violação da Ética Maior:

- i) respeito pelo outro, com todas as suas diferenças;
- ii) solidariedade com o outro na satisfação de suas necessidades materiais e espirituais;
- iii) cooperação com o outro na preservação dos bens naturais e culturais, para a sobrevivência com dignidade. [17]

Há uma moralidade associada ao conhecimento e em particular ao conhecimento matemático. Por que insistirmos em Educação e Educação Matemática, e no próprio fazer matemático, se não percebemos como nossa prática pode ajudar a construir uma humanidade ancorada em respeito, solidariedade e cooperação?

A PAZ TOTAL depende essencialmente de cada indivíduo se conhecer e se integrar na sua sociedade, na humanidade, na natureza e no cosmos. Ao longo da existência de cada um de nós, pode-se aprender matemática, mas não se pode perder o conhecimento de si próprio e criar barreiras entre indivíduos e os outros, entre indivíduos e a sociedade, e gerar hábitos de desconfiança do outro, de descrença na sociedade, de ignorância e desrespeito à humanidade, que é uma só, à natureza, que é comum a todos, e ao universo, no qual tudo e todos se situam.

Cabe ao matemático e ao educador matemático subordinar a sua ciência e a difusão da mesma à Ética Maior. Em outros termos, a busca de uma Ética Matemática. O encontro de uma Ética Matemática é o objetivo maior do Programa Etnomatemática.



John Nash, matemático, professor e Prêmio Nobel de Economia cuja vida é retratada no filme "Uma Mente Brilhante" (A Beautiful Mind) nasceu em 13 de junho de 1928 em Bluefield, West Virginia, nos Estados Unidos. Seu pai, também chamado John, era um engenheiro elétrico; sua mãe, Virginia, era uma professora. Dois anos e meio após o seu nascimento, em 16 de novembro de 1930, nasceu sua irmã Martha.

John cresceu num lar onde recebeu carinho e atenção, mas mesmo assim, era um menino solitário e introvertido que mostrava maior interesse por livros do que pelas pessoas. Sua mãe incentivou a sua curiosidade intelectual e foi sua professora particular, ajudando-lhe a obter uma excelente formação acadêmica.

John Nash cresceu na pequena cidade de Bluefield. Na escola, seus professores não o reconheciam como um prodígio, e sim como um menino extremamente anti-social. Já aos doze anos, realizava experimentos científicos em casa. Era claro que aprendia mais em casa do que na escola, e que estava insatisfeito com o ensino no colégio.

A primeira vez que demonstrou interesse por matemática foi aos quatorze anos, quando leu a obra "*Men of Mathematics*", de T. Bell, e conseguiu provar um teorema clássico de matemática chamada de Fermat. Ainda no colegial, fez um curso de matemática na Universidade de Bluefield.

Em junho de 1945, John Nash ingressou na prestigiosa Universidade de Carnegie Mellon, onde lhe foi oferecida uma bolsa de estudos. Iniciou sua carreira universitária estudando química, mas logo se frustrou com a falta de pensamento criativo exigido no estudo da matéria. Passou então a estudar matemática, tendo sido convencido por seus professores que este campo acadêmico lhe renderia uma carreira promissora. John também fez um curso de "Economia Internacional", onde se deparou com teorias acadêmicas que o levaram a formular idéias originais que mais tarde tiveram um grande impacto no estudo de economia e que futuramente lhe renderam um Prêmio Nobel.

Quando John Nash se formou em Carnegie, ele havia progredido tanto academicamente que se formou com um mestrado. Decidiu então continuar seus estudos e obter um doutorado em matemática. Seu professor da universidade lhe escreveu uma carta de recomendação composta de apenas uma linha: "Este homem é um gênio".

John foi aceito no programa de doutorado de matemática de duas das mais famosas universidades dos Estados Unidos: Harvard e Princeton. Como a proposta de Princeton foi a mais generosa, ele seguiu para lá, onde demonstrou interesse por vários campos de matemática pura: topologia, geometria algébrica, teoria de jogos e lógica. Mas mesmo em Princeton, John Nash evitou comparecer às palestras e aulas. Decidiu aprender sozinho, sem a ajuda de professores ou mesmo de livros, para poder desenvolver teorias e conceitos originais. Em muitos aspectos, sua reclusão pessoal e acadêmica foi bem-sucedida e ele se tornou um dos mais originais matemáticos da história.

Em 1950, aos 21 anos, John Nash, escreveu uma tese de doutorado que lhe rendeu, 45 anos mais tarde, o Prêmio Nobel de Economia. Seu trabalho, conhecido como o "Equilíbrio de Nash" revolucionou o estudo de estratégia econômica.

Após se formar em Princeton e lecionar lá durante um ano, John Nash tornou-se professor de matemática da famosa universidade de MIT (Massachusetts Institute of Technology). Ensinou em MIT durante os anos 1951-1959, mas seus métodos didáticos eram bastante impopulares com alunos. Durante essa época, John Nash realizou diversos avanços no estudo da matemática, resolvendo um problema clássico, até então não solucionado, de geometria diferencial.

Durante seus anos em MIT, seus problemas psíquicos passaram a se agravar. Contudo, em 1953, teve um filho com Eleanor Stier. O menino foi chamado de John David Stier. No entanto, ao contrário da vontade de Eleanor, John Nash nunca se casou com ela.

Em 1957, o brilhante matemático se casou com Alicia, uma aluna de física formada em MIT, onde se conheceram. No outono de 1958, Alicia engravidou. Porém, um ano mais tarde, John Nash começou a sofrer de esquizofrenia paranóica. Em razão de sua doença mental, teve que desistir de seu posto de professor de MIT e foi hospitalizado, passando meses em hospitais, mesmo contra a sua vontade. Nash se recuperava temporariamente, mas logo voltava a sofrer distúrbios mentais. Contudo, nos breves intervalos de sua recuperação, produziu importantes trabalhos matemáticos.

Ao longo dos próximos anos, foi se recuperando lentamente, conseguindo ignorar seus delírios causados pela esquizofrenia paranóica. Nash voltou a trabalhar, retornando à Princeton como professor de matemática e ganhou uma série de prêmios acadêmicos internacionais. Em 1994, por sua tese de doutorado escrita há décadas atrás, foi agraciado com o mais prestigioso prêmio de matemática do mundo: o Nobel. Ao longo dos anos, sua tese, o "Equilíbrio de Nash", foi usada para solucionar vários problemas econômicos e políticos. Mesmo assim, John Nash o considerou seu "trabalho mais insignificante!".

John Nash continua ensinando matemática na Universidade de Princeton, no estado norte-americano de Nova Jérsei. O filme "Uma Mente Brilhante" (A Beautiful Mind) dirigido por Ron Howard e estrelado por Russell Crowe, retrata uma versão romantizada de sua vida.

METODOLOGIA DA MATEMATICA

Metodologias mais comuns

O ensino tradicional dominou a sala de aula durante séculos, até o surgimento de novas maneiras de ensinar.

Tradicional

Formada no início do século 20 com métodos clássicos que envolvem a repetição de algoritmos.

Foco Dominar regras da aritmética, da álgebra e da geometria.

Estratégias de ensino Aulas expositivas sobre conceitos e fórmulas, com os alunos copiando e fazendo exercícios para a fixação.

Escola Nova

A partir dos anos 1920, atingiu sobretudo as séries iniciais. Foi colocada em prática principalmente em escolas particulares, com o aluno no centro do processo de aprendizagem.

Foco Trabalhar o conteúdo com base na iniciativa dos estudantes em resolver problemas que surgem em um rico ambiente escolar.

Estratégias de ensino Jogos e modelos para aplicar em situações cotidianas.

Matemática Moderna

Surgiu como um movimento internacional na década de 1960.

Foco Conhecer a linguagem formal e ter rigor na resolução de problemas.

Estratégias de ensino Séries de questões para usar os fundamentos da teoria dos conjuntos e da álgebra.

Didática da Matemática

Começou nas décadas de 1970 e 80, com autores como Guy Brousseau e Gérard Vergnaud.

Foco Construir conceitos e estratégias para resolver problemas.

Estratégias de ensino Alunos devem discutir em grupo, justificar escolhas e registrar as hipóteses.

Etnomatemática

Surgiu no Brasil em 1975 com os trabalhos de Ubiratan D'Ambrosio.

Foco Aprender usando questões dos contextos sociais e culturais.

Estratégias de ensino Mudam conforme o contexto e a realidade em que a disciplina é ensinada.

<http://revistaescola.abril.com.br/matematica/fundamentos/assim-turma-aprende-mesmo-panoramas-perspectivas-427209.shtml>

