2

Conceitos matemáticos

Antes de adentrarmos ao mundo da Estatística, alguns conceitos são convenientes resgatar da matemática. Nosso objetivo será o de tão somente relembrá-los, por isso, não nos deteremos muito tempo neles. A idéia é que como para o estudo da Estatística eles são pressupostos, ou seja, sem eles é impossível compreender a proposta da Estatística, pode ser útil retomá-los, sem exagerarmos a dose. Nesse sentido, retomaremos os conceitos de razão e proporção; a seguir, grandezas e medidas; depois, porcentagem; e ainda, coeficientes, taxas e índices; enfim, sistema de coordenadas cartesianas.

Boa leitura!

INTERNET

Veja mais sobre frações no site da Wikipedia: http://pt.wikipedia.org/wiki/Fra%C3%A7%C3%A3o

Seção 1: Razões e Proporções

Chamamos de **razão** a uma maneira de *comparar* quantidades. Por exemplo, se um determinado conjunto **A** possui 10 elementos e, outro conjunto **B** possui 5 elementos, podemos comparar esses conjuntos. Veja Figura 2, abaixo:

SAIBA MAIS

Uma divisão nada mais é do que uma simplificação de frações. Observe que 10 ÷ 5 é o mesmo que $\frac{10}{5}$. Essa divisão é fácil: $\frac{10}{5} = 2$

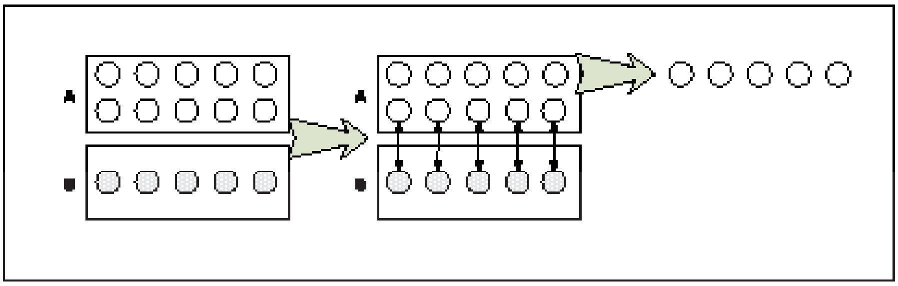


Figura 2: Razão: Comparação

Você reparou que para cada elemento do conjunto **B** existe um elemento do conjunto **A**? Reparou, ainda, que sobraram 5 elementos do conjunto **A**? Pois bem, a comparação dos conjuntos **A** e **B**, da Figura 2, acima, indica que:

$$\frac{10}{5} = 10 \div 5 = 2$$

Dizemos que a comparação dos 10 elementos do conjunto **A** com os 5 elementos do conjunto **B** é a **razão de 10 para 5**. De outra forma, para os 5 elementos de **B** existem 5 elementos mais 5 elementos de **A**, existem, portanto, 2 vezes elementos em **A** comparados a **B**.

Vejamos outro exemplo: Suponha que você possua R$ 2,00 e eu R$ 8,00. Qual a razão do que você possui para o que eu possuo?

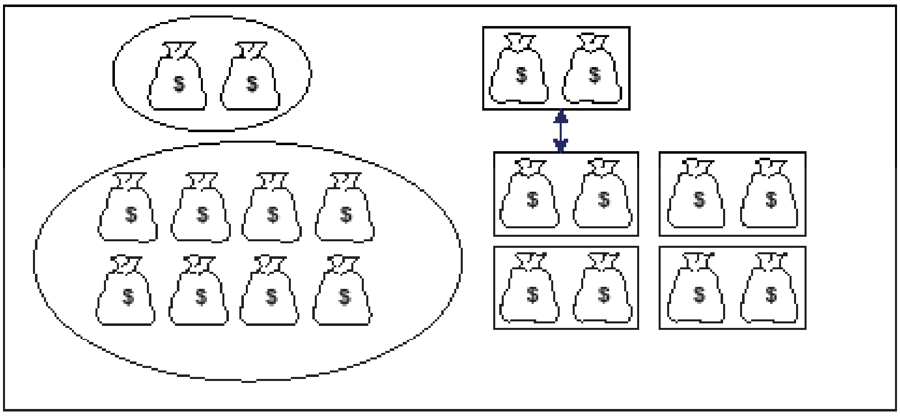


Figura 3: Razão: Exercício

Observe que se você possui R$ 2,00 e eu possuo R$ 8,00, dizemos que eu possuo 4 vezes aquilo que você possui ou

$$\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Desse modo, dizemos que **2 está para 8** ou **1 está para 4**. A Figura 4, abaixo, talvez ajude a compreender que $\frac{2}{8}$ representa a mesma porção que $\frac{1}{4}$. Quando isso ocorre, dizemos que as razões são **semelhantes.**

SAIBA MAIS

Sempre que temos razões semelhantes, é preferível usar a mais simples, a qual, em matemática, chama-se razão irredutível.

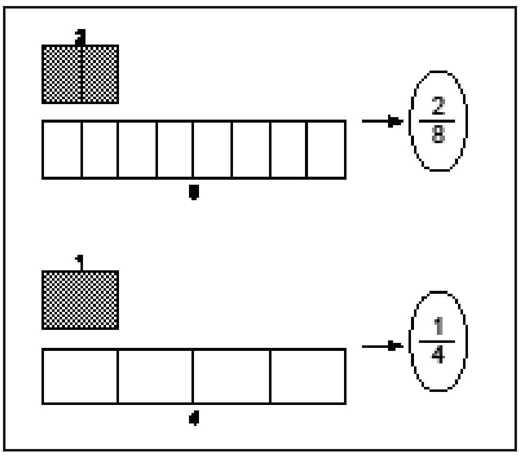


Figura 4: Razão: Representação

Proporções, por sua vez, são também comparações. Mas são comparações entre duas razões. Veja Figura 5, abaixo:

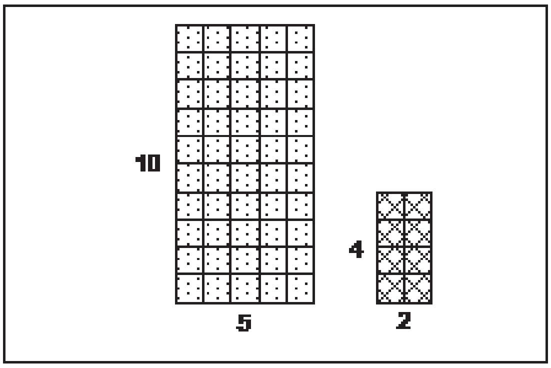


Figura 5: Proporções: Conceito

Observe que na Figura 5, acima, temos dois desenhos. O primeiro desenho é *proporcional* ao segundo. Por quê? Vamos representar o primeiro desenho por meio de uma razão: $5 \div 10 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, ou seja, **1 está para 2**. O segundo desenho pode ser representado como $2 \div 4 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, isto é, **1 está para 2**. Você notou? Quando duas razões são iguais, estamos diante de uma proporção:

$$\frac{5}{10} = \frac{2}{4},$$

dizemos que: **5 está para 10 assim como 2 está para 4**.

Um bom uso das *razões* e *proporções* é com mapas, plantas e maquetes. Veja a planta de um bairro de uma cidade, abaixo:

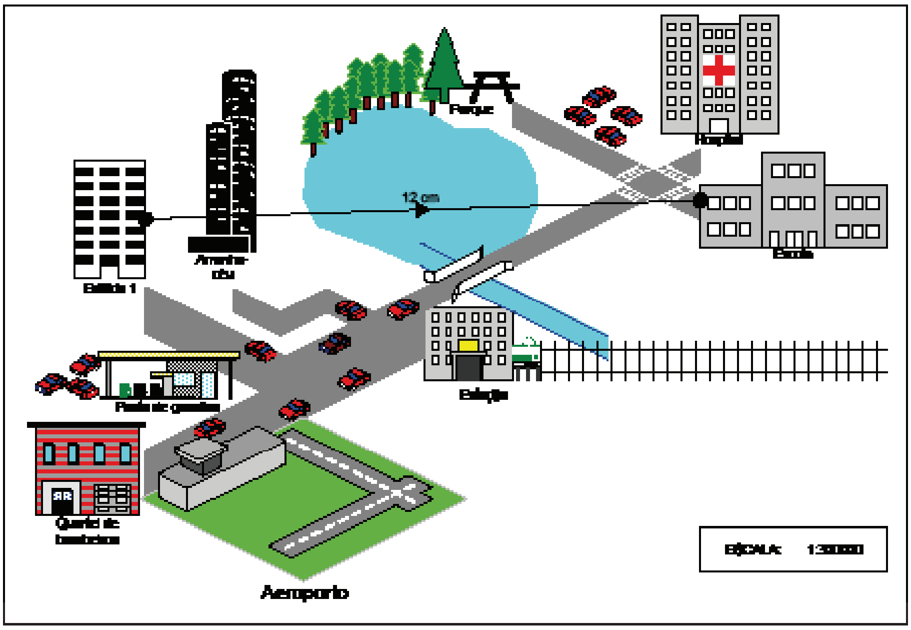


Figura 6: Razões: Proporções: Escala

IMPORTANTE

A Figura 6 anterior apresenta o mapa de um bairro em escala. Isso significa que a escala do mapa indica a razão entre as *distâncias representadas* e as *distâncias reais*. Isto é, a escala 1:300000 indica que cada *cm* no desenho corresponde a *300.000 cm* reais. Veja:

$$\boxed{Escala = \frac{distância\ no\ desenho}{distância\ real}}$$

Assim, supondo que você vá em linha reta do "Edifício 1" até a "Escola" e a distância no desenho é de 12 cm, qual a distância real? Fácil:

Solução:

$$\frac{1}{300.000} = \frac{12}{x} \Rightarrow x = 12 \text{ x } 300.000 = 3.600.000$$

$x = 3.600.000$ cm

$x = 36$ km

Logo, a distância real é de 36 Km.

Verifique quais figuras, abaixo são proporcionais, sabendo que as medidas estão em milímetros (mm).

PRATIQUE

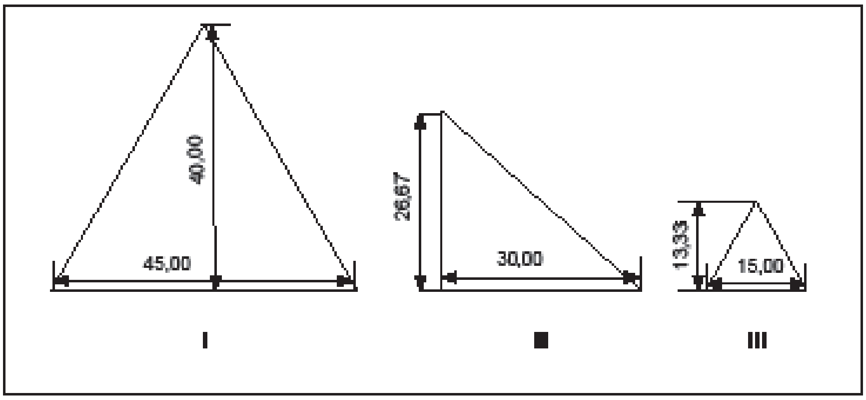


Figura 7: Razões e Proporções: Exercício

Seção 2: Grandezas e Medidas

O professor Dante[14] inicia sua aula sobre **grandezas** e **medidas** fazendo algumas perguntas, como por exemplo:

REFLEXÃO

- Qual é a sua altura?
- Qual será a temperatura máxima hoje?
- Qual é a sua massa?
- Quanto tempo dura seu trabalho?

O professor mostra que para responder a essas perguntas é preciso usar **medidas**. Para isso, precisamos usar *instrumentos*, bem como reconhecer as **grandezas**. Veja:

SAIBA MAIS

"Não se esqueça: em uma medida, deve sempre aparecer o número acompanhado da unidade de medida usada: 5 palmos, 10 cm etc." (DANTE, 2003, p. 112).

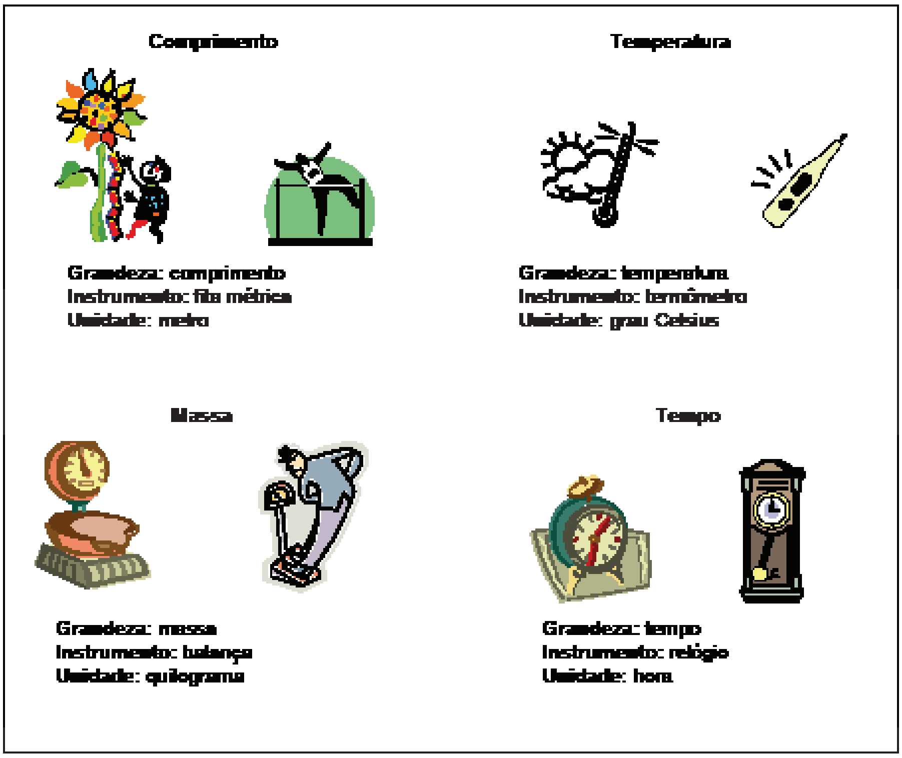


Figura 8: Grandezas

SAIBA MAIS

"Em Matemática, entende-se por grandeza tudo que é suscetível a aumento ou diminuição. Assim, podemos falar em grandezas como: tempo, velocidade, peso, número de pessoas, número de objetos etc." (PARENTE; CARIBÉ, 1996, p. 44).

Medir é comparar **grandezas** de mesmo tipo. Professores de matemática adoram dizer: "– não se pode somar laranjas com limões!". Eles têm razão: só podemos operar com grandezas iguais. Isso quer dizer que não posso somar 2 horas com 2 Km, pois, as grandezas são diferentes (no primeiro caso, a grandeza é *tempo*; no segundo, *comprimento*).

14 DANTE (2003, p. 111).

Quando eu tomo a medida do comprimento de uma mesa, por exemplo, eu digo: a mesa possui 1 metro de comprimento. Isso quer dizer que eu comparei a unidade *metro* com o comprimento da *mesa*. Observe a Figura 9, abaixo:

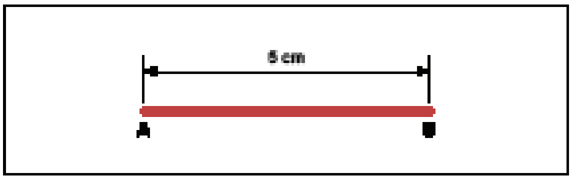


Figura 9: Medida de Comprimento: Segmento de reta

O segmento de reta AB mede 5 cm; podemos dizer que o segmento AB é igual a 5 unidades de medida cm; ou ainda, $\overline{AB} = 5\ cm$. Quando se mede uma **grandeza** sempre se compara com um padrão de referência estabelecido. Por exemplo, “dizer que uma corda tem 30 metros de comprimento é dizer que ela é 30 vezes maior do que um objeto cujo comprimento foi definido como sendo um metro”.[15]

Duas grandezas são ditas diretamente proporcionais quando o aumento do valor de uma leva ao aumento do valor da outra e são inversamente proporcionais quando, ao contrário, o aumento de uma leva à diminuição de outra. Para resolvermos problemas envolvendo grandezas direta ou inversamente proporcionais, recorremos à regra de três.

ATENÇÃO

Regra de Três Simples

Quando colocamos gasolina em um automóvel, o preço que pagamos é **diretamente proporcional** ao volume de gasolina colocado. Observe que se o preço do litro de gasolina custa R$ 2,59, é possível saber quanto custará para encher um tanque de 55 litros. Veja:

Litros de gasolina	Preço (R$)
1	2,59
55	x

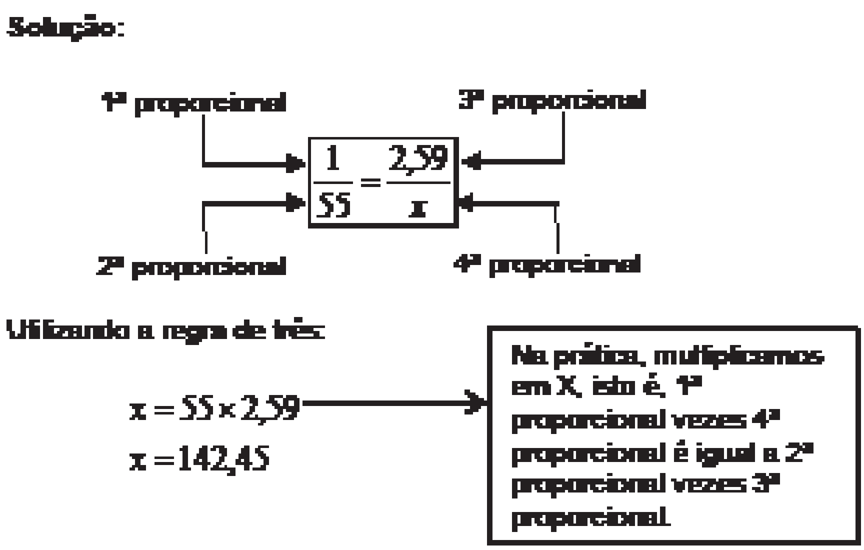
INTERNET

Conheça mais sobre regra de três simples no site: http://www.somatematica.com.br/fundam/regra3s.php

15 SEARS; ZEMANSKY; YOUNG (1985, p. 3).

Note que conhecemos três números e queremos conhecer um número: *x*. Esse quarto número é conhecido como *quarta proporcional* e, para encontrá-lo, utilizamos o procedimento conhecido como **regra de três**.

Solucionando nosso problema, temos que:



REFLEXÃO

Então, para encher um tanque de 55 litros, gastarei R$ 142,45.
Você notou que a regra de três nada mais é do que uma proporção?

Para o caso de grandezas **inversamente proporcionais**, é preciso tomar um pequeno cuidado na hora de montar a proporção. O restante é igual ao caso anterior. Um problema clássico desse tipo é o dos pedreiros construindo um muro: 3 pedreiros trabalhando constroem um muro em 10 dias. Em quantos dias 6 pedreiros construiriam o mesmo muro trabalhando no mesmo ritmo? Vamos responder:

Número de pedreiros	Tempo (em dias)
3	10
6	x

Observe que utilizamos duas setas: uma para o número de pedreiros e outra para o tempo. A seta para cima indica que o número de pedreiros aumentou (de 3 para 6); a seta para baixo indica que o tempo diminuiu (de 10 para x). Veja que mesmo eu não sabendo, ainda, quanto tempo será, eu posso garantir que o tempo será menor do que 10 dias, se com 3 pedreiros eu preciso de 10 dias, com mais pedreiros eu precisarei de menos de 10 dias, não é mesmo? Quando as setas estão orientadas para sentidos diferentes, estamos diante de grandezas *inversamente proporcionais*. Na prática, isso mudará nossa proporção:

ATENÇÃO

É preciso estar sempre atento às grandezas: se são diretamente ou inversamente proporcionais.

Solução:

Note que a segunda razão foi invertida.

$$\frac{3}{6} = \frac{x}{10}$$

Então,

$$6x = 3 \times 10$$

$$x = \frac{30}{6}$$

$$x = 5$$

Aumentando o número de pedreiros de 3 para 6, o muro seria construído em 5 dias.

Sabendo que a altura da mulher é de 1,60m, quanto mede seu cachorro?

PRATIQUE

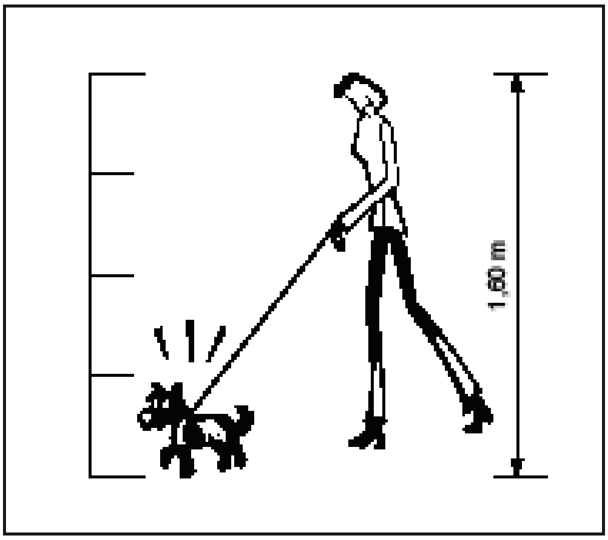


Figura 10: Regra de Três: Exercício

Seção 3: Porcentagem

ATENÇÃO

***Porcentagem** é uma razão com o denominador sempre igual a 100.*

Desse modo, $\frac{25}{100}$, por exemplo, é uma *porcentagem* e pode ser expressa como 25% (*vinte e cinco por cento*).

Na prática, calculamos as porcentagens em diversas situações. Suponha que meu salário seja de R$ 400,00 e eu receberei um aumento de 12%. Quanto passarei a receber?

Solução:

12% *de* 400 = $\frac{12 \times 400}{100}$ = 48

Passarei a receber, portanto, R$ 400,00 + R$ 48,00 = R$ 448,00.

Sempre vemos nos supermercados o uso das porcentagens. Por exemplo: um produto de R$32,00 está com desconto de 7%. Por quanto ele está sendo vendido?

Solução:

7% *de* 32 = $\frac{7 \times 32}{100}$ = 2,24. Então,

32,00 – 2,24 = 29,76

Logo, o produto está sendo vendido a R$ 29,76.

Vamos realizar um outro tipo de exercício muito comum, com o uso de porcentagens. A Tabela 1, abaixo, apresenta a população total brasileira, por sexo. Pergunta-se: qual a porcentagem de mulheres na população total brasileira?

Tabela 1: População: Brasil

População residente, por sexo			
Grupos por idade	**Total**	Homens	Mulheres
Total	**169 872 856**	83 602 317	86 270 539

Fonte: IBGE, Censo 2000

Para responder a essa pergunta, tenho que ter clareza de que a população total brasileira corresponde a 100%. Assim, 100% = 169.872.856

O que quero descobrir é qual a porcentagem desse total que corresponde a 86.270.539. Veja:

Porcentagem	População
100	169.872.856
x	86.270.539

Para resolver o problema, usaremos o conceito de proporções, assim:

$$\frac{100}{x} = \frac{169.872.856}{86.270.539} \Rightarrow 169.872.856x = 100 \times 86.270.539$$

$$x = \frac{8.627.053.900}{169.872.856} = 50{,}78\%$$

Assim, no Brasil, a população de mulheres corresponde a 50,78% da população total.

IMPORTANTE

PRATIQUE

Sabendo que a população total brasileira é de 169.872.856 e que a população brasileira em idade escolar é de 30.502.425, pergunta-se:* ***qual o percentual de brasileiros em idade escolar?*** *Em outras palavras, quantos por cento da população total brasileira está em idade escolar? Registre a atividade em seu memorial.*

*Fonte: IBGE, Censo Demográfico 2000

Seção 4: Coeficientes, taxas e índices

Coeficiente, outro importante conceito matemático que queremos resgatar, também é o resultado de uma *divisão* de uma quantidade por outra. Por exemplo, se numa escola com 400 alunos, 80 ficaram reprovados, então, o *coeficiente de reprovação* foi de 0,2, porque

número de reprovados ÷ *número de alunos* = 0,2.

SAIBA MAIS

"Os coeficientes são razões entre o número de ocorrências e o número total (número de ocorrências e número de não-ocorrências)." (CRESPO, 1995, p. 34).

SAIBA MAIS

"As taxas são os coeficientes multiplicados por uma potência de 10 (10, 100, 1.000 etc.) para tornar o resultado mais inteligível." (CRESPO, 1995, p. 35).

Para facilitar os cálculos, é comum transformarmos o coeficiente em **taxa**. Para isso, basta multiplicarmos o coeficiente por 10, 100, 1000 ou qualquer outra **potência de 10**. Normalmente, usamos 100. Observe:

0,2 x 100 = 20%

***Coeficiente** de reprovação* — *Taxa de reprovação*

Figura 11: Coeficiente e Taxa

Nosso *coeficiente de reprovação* (**0,2**) multiplicado por 100 é igual à *taxa* de 20%, pois, 0,2 x 100 = 20%. Mas o que isso significa? Significa que de que cada 100 alunos, 20 ficaram reprovados.

REFLEXÃO

Observe como é fácil comprovar isso. Vamos agrupar os 400 alunos em grupos de 100. Assim, teríamos 4 grupos de 100 alunos. Cada grupo possui 20 reprovados. Logo, 20 vezes 4 é igual a 80 alunos reprovados. Bem, isso mostra que nosso coeficiente de reprovação (20%) está correto.

Como se vê *coeficiente* e *taxa* são conceitos muito parecidos. A única diferença é a multiplicação do *coeficiente* pela *potência de 10* que dará a *taxa*.

SAIBA MAIS

"Os índices são razões entre duas grandezas tais que uma não inclua a outra." (CRESPO, 1995, p. 34).

O conceito de **índice**, por sua vez, não é muito diferente, senão por uma única razão: dividimos grandezas diferentes. Observe que no nosso exemplo, o *coeficiente de reprovação* é 0,2 e a *taxa de reprovação* é de 20%; nos dois exemplos estamos tratando do número de *alunos*. Assim,

Coeficiente de reprovação = nº de alunos reprovados ÷ nº total de alunos

Mas suponha que queiramos saber a relação entre o número de *alunos* reprovados e o número de alunos reprovados em *matemática*. Nesse caso, estamos diante de duas grandezas diferentes. Assim, essa comparação de grandezas diferentes chama-se **índice** (por exemplo, *índice de reprovados por disciplina*).

IMPORTANTE

Vamos realizar um exercício. Veja a Tabela 2, abaixo:

Tabela 2: Aprovação: Ensino Fundamental: Brasil: 2005

Unidade da Federação	Alunos aprovados no Ensino Fundamental – Total				
	Total	Federal	Estadual	Municipal	Privada
Brasil	**26.368.619**	23.172	9.752.502	13.434.669	3.158.276

Fonte: Censo Escolar 2005

Essa Tabela apresenta o total de alunos aprovados no ensino fundamental brasileiro, por dependência administrativa. Vamos calcular *coeficiente* e *taxa* utilizando essa Tabela.

REFLEXÃO

Primeiro: qual é o coeficiente de aprovação no ensino fundamental dos alunos que freqüentam escolas da rede municipal?

Para responder a essa pergunta faremos a seguinte divisão:

$$\textit{coeficente de aprovação da rede municipal} = \frac{\textit{total de aprovados na rede municipal}}{\textit{total de aprovados no Brasil}}$$

Assim,

$$\textit{coeficente de aprovação da rede municipal} = \frac{13.434.669}{26.368.619} = 0,5$$

Isso tem algum significado muito importante para a educação? Pouco provável, a não ser pelo fato de que o *coeficiente* de 0,5 (que representa uma *taxa* de 0,5 x 100 = 50%) corresponde a dizer que de cada 100 alunos aprovados no país, 50 são da rede municipal.

Veja que trabalhamos com *coeficiente* e *taxa* no exemplo acima. Agora, para trabalharmos com *índice*, precisaremos comparar grandezas diferentes. Relembrando, se você ainda tiver dúvidas sobre grandezas, retome a Seção 2: Grandezas e Medidas, desta Unidade.

Vamos supor que queiramos estabelecer o *índice de densidade professor-aluno aprovado no ensino fundamental na rede municipal de ensino*. Precisaremos, portanto, da Tabela 3, abaixo.

Tabela 3: Função Docente: Educação Básica: Brasil: 2005

Unidade da Federação	Funções Docentes Exercendo Atividades em Sala de Aula				
	Total	Federal	Estadual	Municipal	Privada
Brasil	**2.589.688**	14.980	940.039	1.110.132	524.537

Fonte: Censo Escolar 2005

Nesse caso, estamos diante de duas grandezas diferentes: professores e alunos. Assim,

$$\textit{índice de densidade professor – aluno da rede municipal} = \frac{1.110.132}{13.434.669} = 0{,}08$$

ATENÇÃO

Observe que um índice também pode ser transformado em taxa.

Isso representa uma *taxa* de 0,08 x 100 = 8%; ou seja, para cada 100 alunos aprovados na rede municipal, há 8 professores.

PRATIQUE

Calcule o coeficiente de aprovação no Ensino Fundamental da rede privada, da zona rural brasileira utilizando a Tabela 4, abaixo. Depois, transforme esse coeficiente em taxa.

Registre os resultados em seu memorial.

Tabela 4: Aprovação: Ensino Fundamental: Rural: Brasil: 2005

Unidade da Federação	Alunos aprovados no Ensino Fundamental Rural				
	Total	Federal	Estadual	Municipal	Privada
Brasil	**4.085.448**	499	499.117	3.553.931	31.901

Fonte: Censo Escolar 2005

IMPORTANTE

Seção 5: Sistema de Coordenadas Cartesianas

Os professores Jakubo e Lellis (1995) contam uma história bastante interessante sobre o famoso filósofo e matemático francês **René Descartes**:

SAIBA MAIS

Famoso por ter proferido a frase "penso, logo existo", Descartes (1596-1658) escreveu o **Discurso do Método*****, em 1637, que irá marcar profundamente a realização da ciência no mundo. O nome cartesianas vem do nome do seu autor, Descartes.***

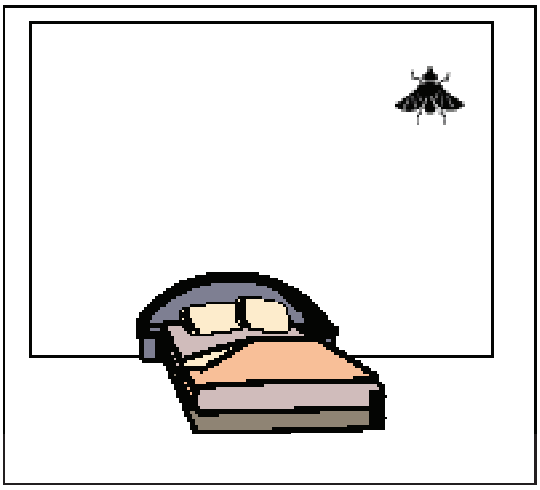


Figura 12: Sistema de Coordenadas Cartesianas: Origem

> "Dizem que ele estava descansando na cama, quando viu uma mosca pousada na parede. A mosca voou, mas Descartes ficou pensando. Como poderia explicar a uma outra pessoa qual era a posição exata da mosca na parede?" (JAKUBOVIC; LELLIS, 1995, p. 210).

Esse teria sido o início do **sistema de coordenadas cartesianas**. Descartes imaginou duas retas: uma horizontal e outra vertical. Se ele marcasse números nessas retas, ficaria fácil localizar a mosca. Veja Figura 13, abaixo:

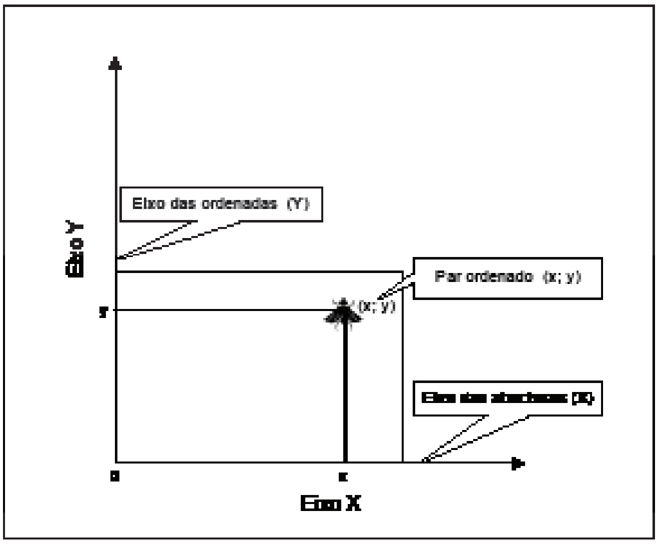


Figura 13: Sistema de Coordenadas Cartesianas: Eixos

Dessa forma, para localizar um ponto em um plano, usamos:[16]

- As retas numeradas **x** e **y** chamam-se **eixos cartesianos**: o eixo **x** é horizontal, o eixo **y** é vertical;
- O plano com esses eixos chama-se **plano cartesiano**;
- Os pares ordenados são as **coordenadas cartesianas** do ponto;
- O ponto correspondente à **origem** é o par ordenado (0; 0).

Veja a Figura 14, abaixo:

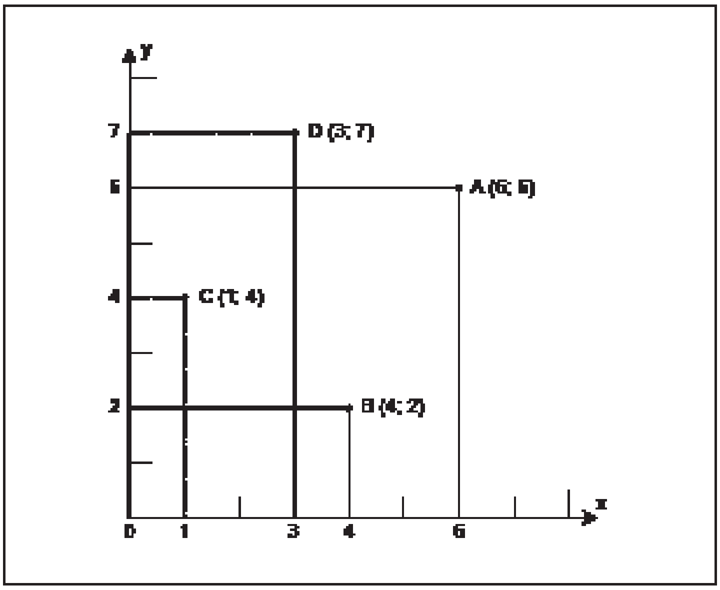


Figura 14: Sistema de Coordenadas Cartesianas: Pontos

16 JAKUBOVIC; LELLIS (1995, p. 211).

IMPORTANTE

De maneira mais completa, podemos localizar qualquer ponto no plano: o ponto A se encontra em (6; 6), isto é, **x** é 6 e **y** vale 6; o ponto B (4; 2); e assim por diante. Viu? Na prática, usamos o sistema de coordenadas cartesianas em diversas situações diferentes quando queremos localizar um ponto em um plano. Veja a Figura 15, abaixo:

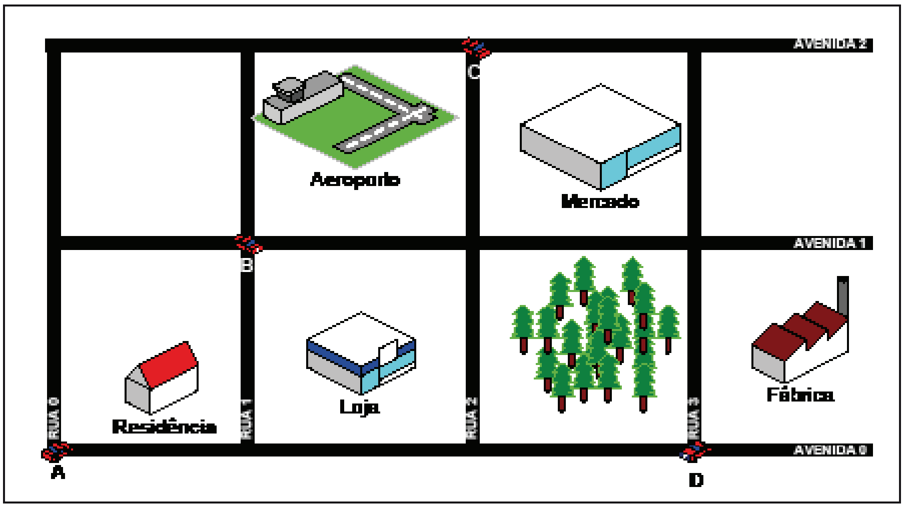


Figura 15: Sistema de Coordenadas Cartesianas: Exercício

Como localizar o carro **B**, por exemplo? Claro! O carro **B** está na Rua 1 com a Avenida 1, ou seja, **B** (Rua 1; Avenida 1). O carro **A** está na origem de nosso sistema; as Ruas indicam o primeiro número do par ordenado (x) e as Avenidas o segundo número (y). Desse modo, **A** (Rua 0; Avenida 0); o carro **C** está na Rua 2, Avenida 3, isto é, C (Rua 2; Avenida 3). Pronto!

Na Figura 15, acima, identifique todos os cruzamentos que não possuem carros.

Seção 6: Arredondamento

Com essa *Seção 6* encerramos nossa Unidade II.

Entendemos por **arredondamento de dados** *a técnica utilizada para suprimir unidades inferiores, isto é, arredondar um número significa reduzir a quantidade de algarismos após a vírgula.*

Um número apresenta uma parte inteira e uma parte fracionária. Veja:

SAIBA MAIS

Na matemática, muitas vezes, deparamo-nos com situações onde o cálculo nunca dá certo se não transformarmos esse número em fração.

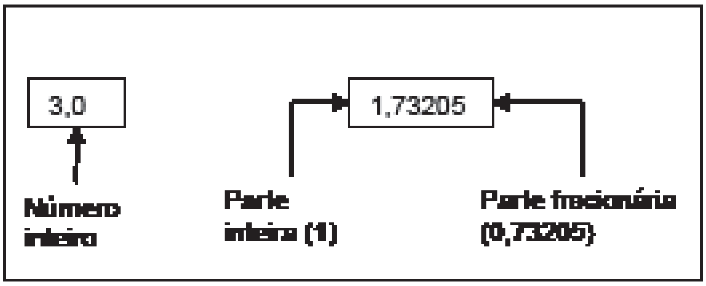


Figura 16: Arredondamento de Números

Às vezes, queremos trabalhar com números com, digamos, uma casa decimal, mas o que fazer quando o resultado encontrado for um número com muito mais casas depois da vírgula? A rigor, na Estatística, precisamos seguir um critério rígido de arredondamento a fim de não comprometermos os resultados.

Por exemplo, suponha que queiramos trabalhar com duas casas decimais e nosso resultado foi 1,1417. Como fazer?

ATENÇÃO

Conforme a Resolução nº 886/66 do IBGE, o arredondamento é realizado da seguinte maneira:

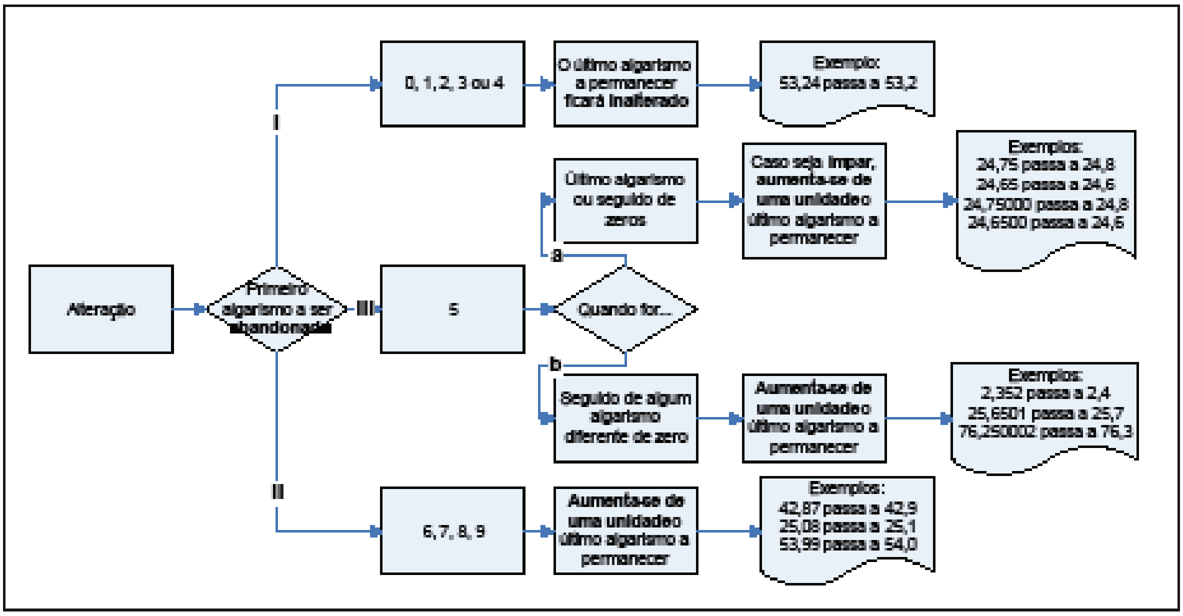


Figura 17: Arredondamento: Fluxograma
Fonte: Adaptado de: CRESPO (1995, p. 174)

Caso haja necessidade de alteração, nossa atenção deve recair sobre o primeiro algarismo a ser abandonado. Teremos três caminhos possíveis:

1) Seguimos o primeiro caminho (**I**) quando o primeiro algarismo a ser abandonado for 0, 1, 2, 3 ou 4. Nesse caso, o algarismo a permanecer ficará **sem alteração**. Por exemplo, 4,84 passa a 4,8;

2) Seguimos o segundo caminho (**II**) quando o primeiro algarismo a ser abandonado for 6, 7, 8 ou 9. Nesse caso, o último algarismo a permanecer será **aumentado de um**. Por exemplo, 4,87 passa a 4,9;

3) Quando o primeiro algarismo a ser abandonado for 5, seguimos o **III** caminho. Nesse caso, temos que prestar muita atenção, pois, o caminho se divide em dois percursos:

   a) Quando o número a ser abandonado for 5 e ele for o último ou seguido de zeros, **aumentaremos uma unidade apenas quando o último algarismo a permanecer for ímpar**. Por exemplo: 5,85 passa a 5,8;

   b) Quando o número a ser abandonado for 5 seguido de algum número diferente de zero, **aumenta-se uma unidade** ao algarismo a permanecer. Por exemplo, 8,55000000002 passa a 8,6.

ATENÇÃO

Observe que o último algarismo a permanecer é 8 (par). Nesse caso, não sofrerá alteração.

ATENÇÃO

Observe que o último algarismo a permanecer é 5 e o primeiro a ser abandonado também é 5. O último algarismo a permanecer (5) foi aumentado de 1 porque havia, após o algarismo a ser abandonado (5) um algarismo diferente de zero.

Casos de arredondamento não são difíceis, mas requerem muita prática até compreendermos bem os processos. Não há outra alternativa.

Ressalto que, em nosso Módulo, simplesmente abandonamos a parte fracionária sem todo esse rigor. Por isso, esteja à vontade para fazer correções às respostas, caso você julgue pertinente.

PRATIQUE

1) Arredonde cada um dos dados abaixo, deixando-os com apenas uma casa decimal (CRESPO, 1995, p. 174):

2,38 =	*4,24 =*	*6,829 =*
24,65 =	*328,35 =*	*5,550 =*
0,351 =	*2,97 =*	*89,99 =*

2) Arredonde cada um dos valores abaixo para o centésimo mais próximo (CRESPO, 1995, p. 174):

46,727 =	*253,65 =*	*28,255 =*
123,842 =	*299,951 =*	*37,485 =*