O Modelo van Hiele de Ensino de Geometria aplicado à 5^a e 6^a séries do Ensino Fundamental

Gisliane A. Pereira* Sandreane P. Silva† Walter dos Santos Motta Jr.‡

Faculdade de Matemática - FAMAT

Universidade Federal de Uberlândia - UFU - MG

Setembro de 2005

Resumo

Este trabalho teve como fundamento o modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de van Hiele. Foram investigadas algumas atividades geométricas desenvolvidas junto a alunos do Ensino Fundamental, os quais constituiram os grupos experimental e de controle. Os mesmos foram submetidos ao pré-teste, intervenção pedagógica e pós-teste. Após análises estatísticas dos resultados obtidos, pudemos observar a eficácia da intervenção pedagógica, concebida segundo o modelo de van Hiele. Tais fatos apontam para a efetiva possibilidade em se transmitir de forma satisfatória conceitos geométricos, para tanto é fundamental que a proposta de trabalho pedagógico seja condizente ao nível cognitivo dos educandos.

Introdução

A Geometria é parte intrínseca do universo físico e também parte relevante da Matemática. Ela está no currículo das escolas de todo o mundo. A análise do ensino/aprendizagem da Geometria insere-se num quadro global que por vezes transcende o próprio campo da Matemática e tem atraído inúmeros estudiosos com focos de abordagem apresentando diferentes ângulos de estudo.

Dificilmente um professor de ensino fundamental ou médio deixa de defrontar-se com as dificuldades do ensino da Matemática, e neste âmbito, verifica-se que grande parte dessas dificuldades deve-se ao ensino da Geometria.

Na verdade, o ensino da Matemática vem enfrentando problemas já a algumas décadas. Muitos professores definem seu trabalho escolar, tomando por base o conteúdo do livro didático, sem levar em conta até mesmo as diretrizes presentes nos PCNs. Sendo assim, o livro didático adotado, passa então a constituir-se no próprio currículo e, as

*gialp@yahoo.com.br Orientanda do Programa de Educação Tutorial da Faculdade de Matemática (PETMAT) de Fev/04 a Abr/05.

†popolana1@yahoo.com.br Orientanda do Programa de Educação Tutorial da Faculdade de Matemática (PETMAT) de Fev/04 a Abr/05.

‡wmotta@ufu.br Professor orientador.

aulas de Matemática são efetivadas, por exemplo, a partir de ordens dadas pelo professor: "abram o livro em tal página e resolvam tais exercícios". No caso da Geometria, por exemplo, muitos professores da pré-escola ensinam conceitos de figuras geométricas como o quadrado, o triângulo e o círculo, da mesma forma mecânica que ensinam leitura e escrita. Tais professores transformam seu papel de educador em roteirista de um simples guia de atividades prontas, mantendo seus alunos dentro da sua visão desarticulada do mundo. Todavia, para a efetividade de uma educação de qualidade, este quadro, inevitavelmente, deve ser mudado, pois se de fato pretende-se que o ensino da Matemática corresponda de modo satisfatório às expectativas e necessidades da sociedade, devem-se estabelecer uma integração entre uma sólida formação, a vivência escolar, as aplicações do saber matemático e a integração do mesmo com o dia-a-dia. Para que isso ocorra é necessário o uso de diferentes linhas metodológicas de trabalho que evidenciem a importância da construção de conceitos matemáticos pelos alunos que se tornam sujeitos ativos da própria aprendizagem.

Na tentativa de enfrentar problemas de ensino/aprendizagem de Geometria como os citados anteriormente, faz-se necessário desenvolver e testar novas metodologias. Neste sentido, este presente trabalho objetiva apresentar uma visão geral sobre uma metodologia específica elaborada pelo casal de pesquisadores holandeses van Hiele. A teoria desenvolvida pelos educadores van Hiele possui uma forte base estruturalista e apóia-se nas contribuições de Piaget sobre o desenvolvimento cognitivo do ser humano, sem deixar de lado a didática da Matemática.

O presente trabalho divide-se em quatro partes. Na primeira parte, desenvolvemos uma abordagem descritiva do modelo de ensino de geometria concebido pelos van Hiele. Descrevemos e analisamos suas principais características. Em seqüência, na segunda parte, apresentamos genericamente a metodologia utilizada, descrevemos os procedimentos e materiais utilizados durante as sessões de intervenção pedagógica no desenvolvimento do exemplo-modelo desenvolvido por nós segundo a metodologia do modelo van Hiele. A terceira parte destina-se à apresentação dos resultados, à descrição de testes estatísticos e à análise dos dados obtidos. Na quarta parte, foram apresentadas as considerações finais e as conclusões obtidas por nós quando do desenvolvimento deste exemplo-modelo.

1 Uma visão geral do modelo de van Hiele

1.1 A teoria de van Hiele

O modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico desenvolvido pelo casal van Hiele originou-se dos trabalhos de doutorado dos mesmos. Este casal holandês, Dina van Hiele e Pierre Marie van Hiele, em meados da década de 50, desenvolveram seus estudos na Universidade de Utrecht, sob a orientação de Hans Freudenthal, idealizando uma nova forma de enfocar o *desenvolvimento do raciocínio em Geometria*. Tal teoria foi produzida no meio de mudanças no campo da Educação Matemática em que a comunidade internacional estava a discutir novos métodos de ensino e novos tópicos curriculares (Matos, 1985).

O casal desenvolveu o seu trabalho/modelo no contexto de um currículo que encarava a Geometria como instrumento para exercitar as capacidades lógicas da mente. Por outro lado, o seu ponto de vista pedagógico incorpora uma perspectiva muito con-

temporânea, o que se torna visível na preocupação de Pierre pelo insight e na ênfase que Dina coloca na manipulação das figuras, no uso do geoplano e nos desenhos feitos pelos alunos com régua e compasso (Matos, 1992).

O insight é, para Pierre van Hiele, um mecanismo chave que permite aos estudantes visualizar diferentes campos, o qual lhes permite construir conceitos mais complexos. Ele usa a idéia gestaltista de que o insight deve ser compreendido como o resultado da percepção de uma estrutura.

O desenvolvimento do insight deve focar-se no desenvolvimento da capacidade dos estudantes verem estruturas como parte de estruturas mais finas, ou como parte de estruturas mais inclusivas.

Gestalt é o termo intraduzível do alemão, utilizado para abarcar a teoria da percepção visual baseada na psicologia da forma.

Aproximadamente a partir de 1870 alguns pesquisadores alemães começaram a estudar os fenômenos perceptuais humanos, especialmente a visão. Seus estudos procuravam entender como se davam os fenômenos perceptuais, tendo se utilizado em grande parte deles, de obras de arte. Queriam entender o que ocorria para que determinado recurso pictórico resultasse em tal e tal efeito. A estes estudos convencionou-se denominar de Psicologia da Gestalt ou Psicologia da Boa Forma. Seus expoentes mais conhecidos foram Kurt Koffka, Wolfgang Köhler e Max Werteimer. Criaram as Leis da Gestalt relativas à percepção humana, que até hoje se mantêm válidas.

Um exemplo da Psicologia da Gestalt é a observação da figura abaixo:

Observando a figura acima da direita para esquerda vê-se um coelho, e da esquerda para a direita um pato.

Destaca-se ainda a existência de uma forte base estruturalista no modelo idealizado pelo casal, em que a influência da Psicologia da Gestalt fornece uma base para análise da percepção e interpretação cognitiva destas estruturas. Para van Hiele, assim como na Psicologia da Gestalt, não há objetos isolados nem conceitos por si, mas todas as entidades existem num contexto (Matos, 1992).

Pierre van Hiele não mostra uma definição de estruturas, mas explica algumas das suas propriedades e dá alguns exemplos propondo que há várias espécies de estruturas:

a) as estruturas do mundo onde vivemos – Mundo 1;

b) as estruturas na nossa mente – Mundo 2;

c) as estruturas no mundo do conhecimento humano comum – Mundo 3.

Ele insiste que, em cognição, é muito importante que a estrutura possa ser vista como uma totalidade porque a estrutura é mais do que a soma dos seus elementos. Há quatro propriedades das estruturas que Pierre van Hiele recolheu da Psicologia da Gestalt:

1) estruturas podem ser estendidas;

2) cada estrutura pode ser vista como uma parte de uma estrutura mais fina;

3) uma estrutura pode ser vista como uma parte de uma estrutura mais inclusiva;

4) uma estrutura dada pode ser isomorfa a outra estrutura.

As estruturas de van Hiele são todas baseadas nas estruturas do Mundo 1 que podem ser percepcionadas como um gestalt. Com base nas estruturas do Mundo 1, são constituídas as estruturas mentais existentes no Mundo 2, a qual afirma que o desenvolvimento mental progride à medida em que as estruturas dos alunos se transformam gradualmente ou se substitui uma estrutura por outra. Van Hiele utiliza este raciocínio quando descreve seu modelo segundo níveis de desenvolvimento da aprendizagem.

Além disso, a influência dos trabalhos de Piaget quanto ao desenvolvimento das estruturas de inteligência em estágios muito contribuíram no embasamento teórico do modelo de van Hiele.

Vejamos a seguir a classificação de Piaget do desenvolvimento das estruturas de inteligência em estágios:

1 - Estágio Sensório Motor: Compreende desde o nascimento até os 2 anos de idade. Ações baseadas em percepções sensoriais e esquemas motores concluídos a partir de reflexos inatos, como o da sucção, por exemplo. Os esquemas vão sendo modificados com experiência, tornando-se assim mais complexos, até dar origem à capacidade de representar eventos futuros.

2 - Estágio Pré-operatório: Compreende dos 2 aos 7 anos. Uso da linguagem oral, enriquecendo as relações interindividuais. Inteligência capaz de ações interiorizadas, isto é, ações mentais, diferentes do pensamento adulto, pois nesta fase uma característica marcante é o egocentrismo.

3 - Estágio Operatório concreto: Compreende dos 7 aos 11 ou 12 anos. Predominância do pensamento lógico e objetivo. O egocentrismo cede lugar a um pensamento mais compatível com a realidade. O real e o fantástico não se misturam mais na percepção da criança. Mais raciocínio, menos percepção. A criança já realiza operações lógico-matemático concretas.

4 - Estágio Operatório Formal: A partir dos 12 anos. Raciocínio mais formal e abstrato. O adolescente pensa e trabalha com a realidade possível utilizando hipóteses.

A partir daí, pode-se perceber que Piaget fornece elementos preciosos que poderão auxiliar educadores na elaboração de problemas de ensino de Geometria, como também sugere metodologias adequadas às atividades geométricas das séries iniciais.

1.2 Descrição do modelo

Van Hiele propõe que "a aprendizagem é um processo recursivo que progride recursivamente através de níveis de pensamento descontínuos – saltos na curva de aprendizagem" (van Hiele e van Hiele – Geldof, 1958, p. 75), que pode ser melhorado por um procedimento didático adequado. Ele pressupõe que há diversos níveis de aprendizagem da Geometria e que a passagem de um nível para o próximo deve ocorrer através de uma seqüência de fases de ensino.

O modelo de van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico pode ser usado para orientar a formação assim como para avaliar as habilidades dos alunos.

Segue-se abaixo uma caracterização dos níveis de van Hiele bem como suas propriedades:

Nível 0 : Visualização: Neste nível os alunos vêem o espaço apenas como algo que existe em torno deles. Reconhecem as figuras geométricas apenas pela sua forma (aparência física), não conseguindo identificar suas partes ou propriedades. São capazes de reproduzir figuras dadas e aprender um vocabulário geométrico básico.

Nível 1: Análise: É onde começa a análise dos conceitos geométricos. Nesta fase o aluno começa a discernir as características e propriedades das figuras, mas não consegue ainda estabelecer relações entre essas propriedades e nem entende as definições ou vê inter-relações entre figuras.

Nível 2: Dedução Informal: Aqui o aluno começa a estabelecer inter-relações de propriedades dentro de figuras e entre figuras, deduzindo propriedades e reconhecendo classes de figuras. Agora, a definição já tem significado, todavia o aluno ainda não entende o significado da dedução como um todo ou o papel dos axiomas nas provas formais.

Nível 3: Dedução: Neste estágio o aluno analisa e compreende o processo dedutivo e as demonstrações com o processo axiomático associado, agora, ele já consegue construir demonstrações e desenvolvê-las de mais de uma maneira, também faz distinções entre uma afirmação e sua recíproca.

Nível 4: Rigor: Agora o aluno já é capaz de trabalhar em diferentes sistemas axiomáticos; analisa e compreende geometrias não euclidianas. A geometria é entendida sob um ponto de vista abstrato.

Características Gerais do Modelo

1 - Seqüencial: O aluno deve necessariamente passar por todos os níveis, uma vez que não é possível atingir um nível posterior sem dominar os anteriores.

2 - Avanço: A progressão ou não de um nível para outro depende mais dos métodos de ensino e do conteúdo do que da idade ou maturação biológica. Nenhum método de ensino permite ao aluno pular um nível, alguns acentuam o progresso, mas há alguns que retardam.

3 - Intrínseco e Extrínseco: Os objetivos implícitos num nível tornam-se explícitos no nível seguinte.

4 - Lingüística: Cada nível tem sua própria linguagem e um conjunto de relações interligando-os. Assim, uma relação que é "correta" em um certo nível, pode se modificar em outro nível.

5 - Combinação inadequada: O professor e o aluno precisam estar raciocinando em um mesmo nível, caso contrário, o aprendizado não ocorre. Ou seja, professor, material didático, conteúdo e vocabulário devem estar compatíveis com o nível do aluno.

Van Hiele propõe que "a transição de um nível para o seguinte não é um processo natural, ela acontece sob a influência de um programa de ensino-aprendizagem" (van Hiele, 1986, p. 50). Este programa de ensino-aprendizagem inclui uma seqüência didática de cinco fases de aprendizado. São elas:

Fase 1: Interrogação informada

Professor e aluno conversam e desenvolvem atividades sobre os objetos do estudo do respectivo nível. Aqui se introduz o vocabulário específico do nível, são feitas observações e várias perguntas. É uma fase preparatória para estudos posteriores.

Fase 2: Orientação dirigida

Atividades são desenvolvidas para explorar as características de um nível e isto deve ser feito através do uso de material selecionado e preparado pelo professor.

Fase 3: Explicação

Agora o papel do professor é de somente orientar o aluno no uso de uma linguagem precisa e adequada. Baseando-se em experiências anteriores os alunos revelam seus pensamentos e modificam seus pontos de vista sobre as estruturas trabalhadas e observadas.

Fase 4: Orientação livre

Diante de tarefas mais complexas, os alunos procuram soluções próprias que podem ser concluídas de maneiras diferentes. Assim, eles ganham experiência ao descobrir sua própria maneira de resolver tarefas.

Fase 5: Integração

Nesta fase o aluno relê e resume o que foi aprendido, com o objetivo de formar uma visão geral da nova rede de objetos e relações, assim, o aluno alcança um novo nível de pensamento.

1.3 Limitações do modelo

Apesar da teoria de van Hiele ser eficiente no processo de ensino-aprendizagem ela possui algumas limitações nas áreas do desenvolvimento cognitivo, dos objetos da aprendizagem, da geometria, da importância das diferenças individuais e na autonomia dos estudantes no processo de aprendizagem.

A teoria de van Hiele não possui uma perspectiva psicológica autônoma. Como já foi dito, ela se apoia na teoria da Gestalt, deixando de fora algumas áreas tais como a imagética, isso ocorre, por exemplo, na idéia de que "no nível 3 já não é possível usar estruturas visuais para clarificar idéias" (van Hiele, 1986, p. 141) o que nega o papel que as imagens mentais desempenham no pensamento de tipo superior.

Do ponto de vista pedagógico, a teoria assume implicitamente que o ensino e a aprendizagem da Geometria deve seguir um modelo que privilegia a dedução. A teoria não abrange áreas como medições, trigonometria, ou geometria analítica, que são importantes nas abordagens curriculares contemporâneas.

Um outro problema verificado é que a teoria não produz explicações satisfatórias na área das diferenças individuais. Nela os alunos são sempre considerados como um grupo homogêneo e não existem estudantes individuais, com estilos cognitivos diferenciados e distintas preferências de aprendizagem.

A teoria não aceita que os alunos possam desenvolver um conhecimento matemático autônomo, e uma das principais contribuições para que isso aconteça é o papel sugerido pelo professor. "Durante toda a discussão das fases de aprendizagem o professor é considerado como a fonte de conhecimento na sala de aula" (Matos, 1992). Sendo assim, não se espera que os alunos contribuam com o seu próprio conhecimento ou experiências, nem se espera que eles desenvolvam produções matemáticas alternativas. Ou seja, a teoria não permite uma construção do conhecimento, apenas desenvolve o raciocínio geométrico.

Apesar de suas limitações a teoria de van Hiele conseguiu sucesso na descrição da situação na sala de aula e no desenvolvimento curricular. Mas há dois tipos de mudanças necessárias: mudanças na teoria cognitiva implícita e mudanças na caracterização dos níveis.

"Uma primeira mudança necessária consiste no abandono do pressuposto sobre as "estruturas espontâneas do material". Esta idéia coloca dificuldades tremendas na compreensão quer da Matemática sob um ponto de vista cultural e social, quer do processo de produção das idéias matemáticas pelos alunos. Uma segunda mudança, que é uma conseqüência natural da primeira é a aceitação de que o processo através do qual modelamos o nosso conhecimento matemático é construtivo. Uma terceira mudança é o abandono da idéia das descontinuidades na passagem de uns níveis para os outros que deve ser entendida de uma forma contínua. A quarta tem a ver com a caracterização dos níveis 3 e 4, exigindo que a compreensão das definições passe para o nível 4" (Matos 1992).

2 Descrição dos testes e materiais

2.1 Modelagem

Para comprovar a eficiência do modelo de van Hiele é necessário se fazer um trabalho de intervenção pedagógica, através da confecção de atividades com materiais concretos e/ou jogos e/ou problemas que envolvam situações do cotidiano do aluno, fundamentado no modelo geométrico de van Hiele e com o apoio da teoria de Piaget.

Ao realizar este trabalho é preciso que o pesquisador estruture dois grupos de alunos. Como ele não pode escolher aleatoriamente o grupo que receberá a intervenção pedagógica, pois nesse caso tem-se a obtenção de dados não confiáveis, é fundamental que a escolha destes grupos seja realizada seguindo o modelo 10 (delineamento com grupo de controle não-equivalente) de Campbell e Stanley [1]. É importante salientar que existem outros tipos de modelos para delineamentos, mas o modelo 10 é o que melhor se adapta a esta situação devido às suas características.

O delineamento com grupo de controle não - equivalente é um dos mais divulgados planos experimentais em pesquisa educacional envolvendo um grupo experimental e um grupo de controle, ambos submetidos a um pré e pós-teste, mas em que o grupo de controle e o grupo experimental não possuem equivalência amostral pré-experimental. Pelo contrário, os grupos constituem coletivos naturalmente reunidos, tais como classes escolares, tão semelhantes quanto a situação o permitir, mas, de qualquer forma, não tão semelhantes que justifiquem a dispensa do pré-teste.

O modelo 10 é um dos modelos utilizados para garantir a validade de um determinado delineamento experimental. Tal validade é dividida em duas partes:

1 - Validade interna: Aqui existem 8 "agentes influenciadores" no processo de análise da validação dos efeitos de um estímulo experimental num determinado delineamento. Estes agentes devem ser considerados/controlados para a eficiência do processo interpretativo do delineamento experimental, são eles: *história, maturação, testagem, instrumentação, regressão estatística, vieses causadores de seleção, mortalidade experimental, interação seleção-maturação.*

2 - Validade externa: Nesta parte existem 4 "fatores influenciadores" no processo de análise da generalização dos efeitos observados num dado delineamento à outras situações modelo, são eles: *efeito de interação entre testagem e a variável (evento) experimental, efeito de interação de condições experimentais, interferência de tratamentos múltiplos, interação entre vieses decorrentes da seleção e a variável experimental.*

No delineamento 10 os grupos são coletivos compostos de sujeitos reunidos de forma natural (sem qualquer tipo de similaridade ou equivalência amostral) que serão reestruturados em dois grupos, segundo opção do experimentador, de forma tal que se busque similaridade (observada através dos escores no pré-teste) dos mesmos quando do recrutamento.

Delineamento 10

O_1 X O_2 grupo experimental

O_1 O_2 grupo de controle

onde:
O_1: pré-teste
X : intervenção pedagógica
O_2 : pós-teste

Segundo este modelo de delineamento, é possível estruturar um grupo experimental e um grupo de controle. Ambos os grupos para serem analisados, em relação a eficiência ou não do modelo de van Hiele, serão submetidos ao pré-teste e ao pós-teste e o grupo experimental, a um trabalho de intervenção de ensino.

Os dados desta pesquisa foram colhidos no período de 25/08/2004 a 01/10/2004.

2.2 Sujeitos

Visando utilizar o método de van Hiele e verificar a sua influência no ensino de Geometria, foi escolhida a Escola Estadual Maria Conceição de Souza Barbosa, situada em Uberlândia.

Os sujeitos envolvidos são 55 estudantes de ambos os sexos com em média 11 anos de idade, cursando a 5^a série do 1° grau, e 52 crianças de ambos os sexos entre 10 e 12 anos de idade, cursando a 6° série do 1° grau desta escola.

Após a aplicação do pré-teste a esses alunos, verificou-se que os 28 alunos da $5^a/1$ e os 26 alunos da $6^\circ/1$.fariam parte de distintos grupos de controle. Os outros 27 alunos da $5^a/2$ e os 26 da $6^\circ/2$ formaram grupos experimentais.distintos.

2.3 Procedimentos e material

Para a elaboração das questões do pré-teste e do pós-teste, assim como a seleção de conceitos e objetivos a serem trabalhados na intervenção pedagógica foram considerados o conteúdo de Geometria da proposta curricular para o ensino de Matemática para a 5^a e 6^a séries do 1° grau (2004) oferecido pela escola e os parâmetros curriculares nacionais relativos a estas séries.

2.3.1 Procedimentos para o pré-teste e para o pós-teste

Para o pré-teste foram elaboradas 10 questões que foram distribuídas aos alunos em papel sulfite. As instruções para a resolução das questões foram dadas pelo pesquisador em voz alta. Tomou-se o cuidado de dar tempo suficiente para os alunos resolverem as questões.

O pós-teste foi composto pelas mesmas questões do pré-teste.

2.3.2 Intervenção Pedagógica

Tendo por embasamento teórico o modelo de van Hiele e o apoio da Psicologia de Piaget, tomando por base o conteúdo e os objetivos do ensino de conteúdo de Geometria da proposta curricular para o ensino de Matemática para a 5^a e 6^a séries do 1° grau (2004), foram elaboradas diversas atividades destinadas às crianças do grupo experimental que caracterizam as sessões de intervenção pedagógica, todas realizadas pelo pesquisador.

Foram realizadas 10 sessões que duraram em média 50 minutos cada, para tais atividades utilizou-se material concreto, problemas que envolviam situações do cotidiano e outros tipos de exercícios. Todas as sessões foram desenvolvidas nos dois primeiros níveis (visualização e análise) do modelo de van Hiele usando suas fases seqüenciais.

2.4 Material

Os materiais utilizados para a execução das atividades foram canudinhos, cartolinas, folhas de jornais, régua, tesoura, papel sulfite, lápis de cor, papel dobra-cor e também elementos encontrados na sala de aula. Teve-se a preocupação de se utilizar materiais que pudessem ser facilmente adquiridos pelos alunos.

2.5 Algumas das atividades desenvolvidas nas sessões de intervenção pedagógica

Atividades aplicadas à 5^a série:

- *Assunto:* Perímetro de um polígono

- Seguindo a fase 1 de aprendizado do modelo de van Hiele, começou-se a aula questionando os alunos sobre o que é perímetro.

Após esta discussão, foi descrita a situação abaixo, antes de passar para a definição de perímetro.

Um terreno de 36 m de frente por 23 m de fundo (lateral), será cercado com um fio de arame. Quantos metros de fio são necessários para cercar todo o terreno?

Solução: Esse terreno tem a forma de um retângulo. Para calcular quantos metros de arame são necessários para cercá-lo, fazemos:

$$36m + 23m + 36m + 23m = 118m$$

Logo, são necessários 118 m de fio para cercar o terreno.

Agora podemos definir o que é perímetro.

Perímetro de um polígono é a soma das medidas dos lados desse polígono.

Para calcular o perímetro de qualquer polígono basta somar as medidas de seus lados, utilizando sempre a mesma unidade de medida.

- Construa dois triângulos que possuam o mesmo perímetro.

- Desenhe um polígono que possua 44 cm de perímetro, usando os canudinhos como sendo os lados desse polígono.

- Num retângulo, a medida da base é 10,4 cm. Sabendo-se que a medida de sua altura é metade da medida do comprimento, qual é o perímetro desse retângulo?

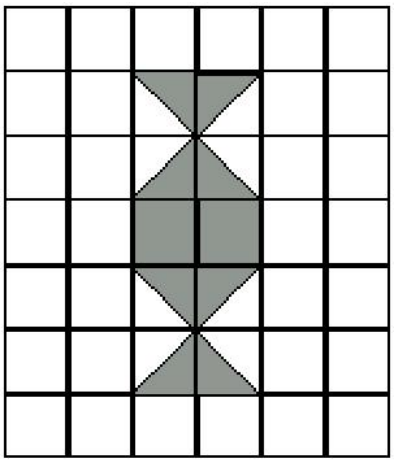
- *Assunto:* Área de figuras

- Seguindo a fase 1 de aprendizado do modelo de van Hiele, começou-se a aula questionando os alunos sobre o que é área de uma figura. Algumas das respostas dadas foram: área é um espaço; área é um lugar; área é um terreno.

Após esta discussão partiu-se para a definição de área:

Área de uma figura plana é o número que expressa a medida da superfície dessa figura, numa certa unidade.

- Considerando como unidade de medida o quadradinho ▩, a área destacada da figura abaixo corresponde a quantos quadradinhos?



- Complete o quadro, escrevendo para cada caso a unidade de medida mais adequada, dentre as medidas: centímetro quadrado, metro quadrado e quilômetro quadrado.

Grandeza a ser medida	**Unidade de medida mais adequada**
a superfície de uma sala	
a superfície de um país	
a superfície da folha de um livro	
a superfície do quadro-negro	
a superfície do seu município	
a superfície de um terreno	

- Complete com a unidade de medida mais adequada, usando os símbolos: cm^2, m^2 ou km^2.

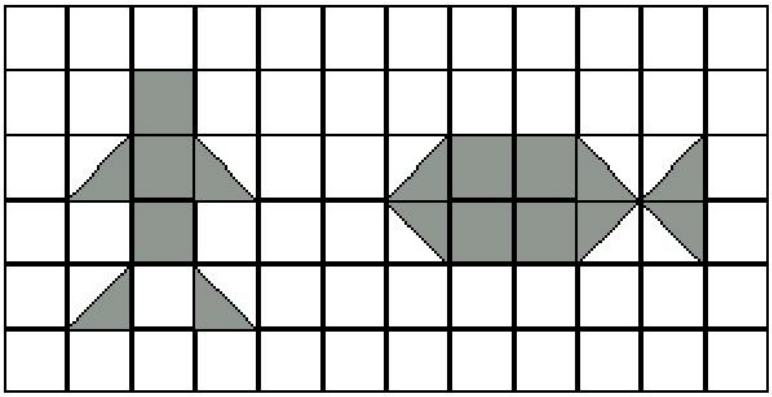
a) A medida da superfície terrestre brasileira é 8 511 965 _____.

b) A medida da superfície de um terreno é 600 _____.

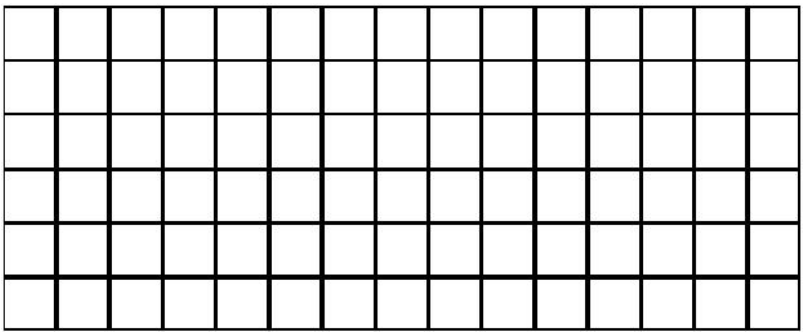
c) A medida da superfície da capa de um livro é 588 _____.

- Construir o metro quadrado utilizando jornal, revista, cartolina ou outro tipo de material. Lembre-se que para representar 1 m^2 você pode construir um quadrado de 1 metro de lado.

- Usando o quadradinho ▭ como unidade de medida, diga qual é a relação existente entre as áreas das duas figuras seguintes:



- Pinte na tela abaixo três figuras que tenham a mesma área e perímetros diferentes.



Após a resolução das atividades pelos alunos, discutiu-se as diferentes soluções encontradas para cada atividade.

Atividades aplicadas à 6^a série:

- Brincadeira do robô;
- Procura ao tesouro;
- Identificação de ângulos em objetos cotidianos;
- Formando ângulos com os ponteiros do relógio;
- Classificação de ângulos segundo medidas e propriedades;
- Como montar seu próprio transferidor (dobradura);
- Como construir a bissetriz brincando (dobradura);
- Atividades para fixação de conceitos, entre outras.

Dentre essas atividades, uma que teve participação efetiva dos alunos, a qual também se mostrou eficaz foi a brincadeira do robô. Tal atividade se desenvolveu da seguinte forma:

• cada aluno formou sua dupla, segundo afinidades;

• cada dupla brincou uma vez, sendo que as outras crianças permaneceram em silêncio durante a brincadeira, dando apenas alguns palpites;

• em cada uma das duplas escolheu-se quem seria o robô e quem seria o comandante;

• o robô teve os olhos vendados;

• o comandante escondia um chocolate levado pelo pesquisador, onde quisesse, desde que respeitasse os limites da sala de aula;

• em seguida o comandante indicava o caminho a ser percorrido pelo robô;

• os comandos eram do tipo: "siga em frente", "vire à direita", "vire à esquerda", "vire de costas", "gire segundo um ângulo de 90º", "dê uma volta de 180º", entre outros.

• A brincadeira só terminava quando o robô encontrava seu "prêmio".

Tal atividade foi desenvolvida com o intuito de desenvolver uma melhor noção de ângulos nos alunos, fazendo com que eles percebessem que o ângulo não é só uma região desenhada no papel, mas que qualquer movimento do corpo pode representar um ângulo. Os comandos que especificavam medida de ângulo foram usadas no sentido de se observar até que pontos os alunos tinham noção do "tamanho" de um ângulo.

3 Análise estatística

3.1 Análise dos dados obtidos na 5^a série

Os dados a serem analisados foram adquiridos através da aplicação de um pré-teste e de um pós-teste para os 55 alunos distribuídos nos grupos de controle e experimental.

Às 10 questões presentes tanto no pré-teste quanto no pós-teste foram atribuídos 1 ponto para os acertos e 0 ponto para os erros.

As questões presentes no pré/pós teste foram, em suma, as seguintes:

1^a) Dê dois exemplos de retângulos que tenham o mesmo perímetro.

2^a) Determinar o perímetro de um polígono.

3^a) Calcular quantos metros de corda são necessários para contornar um certo triângulo.

4^a) Calcular a área de uma figura (seta) utilizando o quadradinho como unidade de medida.

5^a) Responder qual parede possui maior área e qual possui menor área.

6^a) Enumerar a segunda coluna de acordo com a primeira em relação a unidade de área.

7^a) Utilizando o quadradinho como unidade de medida, relacionar duas figuras.

8^a) Calcular a área de uma figura (retângulo) utilizando o quadradinho como unidade de medida.

9^a) Analisar a área do corredor da escola.

10^a) Relacionar perímetro e área desenhando duas figuras.

Segue-se, a relação do número de acertos e erros, no pré-teste, por questão, encontrada na tabela 1 e a relação do número de acertos e erros, no pós-teste, por questão, encontrada na tabela 2.

TABELA 1 NÚMERO TOTAL DE ACERTOS DOS SUJEITOS NOS GRUPOS DE CONTROLE (G.C.) E EXPERIMENTAL (G.E.), NO PRÉ-TESTE, POR QUESTÃO

Questão	G.C.			G.E.		
	Soma pontos	% Erros	% Acertos	Soma pontos	% Erros	% Acertos
1	12	57,14	42,86	13	51,85	48,15
2	13	53,57	46,43	10	62,96	37,04
3	21	25,00	75,00	22	18,52	81,48
4	8	71,43	28,57	5	81,48	18,52
5	18	35,71	64,29	24	11,11	88,89
6	23	17,86	82,14	19	29,63	70,37
7	5	82,14	17,86	3	88,89	11,11
8	19	32,14	67,86	18	33,33	66,67
9	0	100	0	0	100	0
10	1	96,43	3,57	0	100	0

TABELA 2 NÚMERO TOTAL DE ACERTOS DOS SUJEITOS NOS GRUPOS DE CONTROLE (G.C.) E EXPERIMENTAL (G.E.), NO PÓS-TESTE, POR QUESTÃO

Questão	G.C.			G.E.		
	Soma pontos	% Erros	% Acertos	Soma pontos	% Erros	% Acertos
1	10	64,29	35,71	17	37,04	62,96
2	19	32,14	67,86	21	22,22	77,78
3	22	21,43	78,57	16	40,74	59,26
4	10	64,29	35,71	23	14,82	85,18
5	21	25,00	75,00	26	3,7	96,30
6	23	17,86	82,14	25	7,41	92,59
7	4	85,71	14,29	13	51,85	48,15
8	19	32,14	67,86	24	11,11	88,89
9	0	100	0	1	96,30	3,7
10	3	89,29	10,71	3	88,89	11,11

Agora, com o objetivo de verificar se a intervenção pedagógica foi eficiente, analisaremos, quantitativamente, os resultados obtidos através das atividades propostas. Para tal análise, utilizou-se as provas de Wilcoxon e de Mann-Whitney, as quais fazem parte da estatística não-paramétrica. Tal tipo de estatística é usada, neste caso, pois as técnicas para obtenção dos dados não são tão rigorosas na especificação de condições acerca dos parâmetros da população da qual a amostra foi obtida.

O teste T de Wilcoxon é utilizado para comprovar se houve diferença significativa de resultados dentro dos grupos de controle e experimental no pré e pós-teste.

Já o teste U de Mann-Whitney é usado para verificar se houve diferença significativa dentro dos dois grupos independentes (pré-teste e pós-teste), e comprovar se há evidências para acreditar que valores de um grupo A são superiores aos valores de um grupo B.

O número de acertos obtidos pelos sujeitos nos grupos de controle e experimental, no pré e pós-teste está apresentado na tabela a seguir:

TABELA 3. NÚMERO DE ACERTOS DOS SUJEITOS NOS GRUPOS DE CONTROLE E EXPERIMENTAL, NO PRÉ E PÓS-TESTE

Sujeito	G.C.		G.E.	
	Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste
01	3	4	4	7
02	7	7	3	5
03	6	4	6	6
04	7	8	3	6
05	2	4	4	5
06	3	3	2	4
07	4	5	6	7
08	4	2	6	7
09	5	6	6	8
10	5	6	3	7
11	6	7	3	6
12	5	5	3	6
13	3	4	6	7
14	6	6	5	6
15	3	2	2	5
16	2	1	5	5
17	4	6	3	6
18	5	8	5	7
19	4	6	2	7
20	5	3	6	8
21	3	6	4	7
22	6	4	2	5
23	3	4	6	5
24	6	9	7	9
25	3	2	3	7
26	3	4	3	4
27	3	1	6	7
28	4	4	-	-

Analisando, na tabela, os dados obtidos no pré e pós-teste entre o grupo experimental e o de controle, constata-se um aumento considerável de acertos por sujeitos do grupo experimental. E no grupo de controle, percebe-se que alguns sujeitos apresentam um maior número de erros no pós-teste.

A análise estatística feita através do teste T de Wilcoxon, que é utilizado para comparar duas amostras relacionadas, comprova a diferença de resultados existente entre os grupos controle e experimental no pré e pós-teste.

Segue-se abaixo uma pequena explicação sobre a prova de Wilcoxon.

Este teste é aplicado em dados pareados, considerando o sinal e o valor das diferenças entre os pares. Neste teste utiliza-se ranks, pois ele atribui postos ao ordenar as diferenças entre os pares. No caso deste trabalho, o par (X_i, Y_i) é tal que X_i = número de acertos de cada sujeito no grupo de controle ou no experimental no pós-teste, e Y_i = número de acertos de cada sujeito no grupo de controle ou no experimental no pré-teste.

Método

Considere as diferenças $d_i's$ onde $d_i = X_i - Y_i$. Deve-se ordenar os $d_i's$, porém sem considerar o sinal da diferença (em módulo).

- Grandes Amostras ($N > 25$)

Considere T sendo a menor soma dos postos de mesmo sinal. No caso de grandes amostras T tem distribuição aproximadamente Normal e pode-se usar a aproximação considerando:

$$\mu_T = \frac{N(N+1)}{4} \text{ e } \sigma_T = \sqrt{\frac{N(N+1)(2N+1)}{24}}, \text{ onde } \begin{cases} N = \text{número de observações} \\ \mu_T = \text{média} \\ \sigma_T = \text{variância} \end{cases}$$

Calcula-se assim a estatística $z = \frac{T-\mu_T}{\sigma_T}$ e compara-se com os valores tabelados da distribuição de Z (Normal Padrão).

- Empates

Consideremos duas situações:

a) Quando $X_i = Y_i$, ou seja, a informação pré equivale a informação pós para um mesmo indivíduo, descarta-se este par da análise e redefine-se N como sendo o número de pares tais que $X_i \neq Y_i$, para $i = 1, 2, 3, ..., N$.

b) Quando duas ou mais $d_i's$ tem o mesmo valor atribui-se como posto a média dos postos que seriam atribuídos a eles caso não ocorresse empate.

Aplicação do teste T de Wilcoxon com os dados relativos aos grupos experimental e de controle.

TABELA 4. DADOS REFERENTES AO GRUPO DE CONTROLE NO PRÉ E PÓS-TESTE

Nº de acertos do grupo de controle				
Pré-teste	Pós-teste	d_i	d_i (em rank)	Posto de d_i
3	4	1	-1	-6,5
6	4	-2	-1	-6,5
7	8	1	-1	-6,5
2	4	2	1	6,5
4	5	1	1	6,5
4	2	-2	1	6,5
5	6	1	1	6,5
5	6	1	1	6,5
6	7	1	1	6,5
3	4	1	1	6,5
3	2	-1	1	6,5
2	1	-1	1	6,5
4	6	2	-2	-16,5
5	8	3	-2	-16,5
4	6	2	-2	-16,5
5	3	-2	-2	-16,5
3	6	3	-2	-16,5
6	4	-2	2	16,5
3	4	1	2	16,5
6	9	3	2	16,5
3	2	-1	3	22
3	4	1	3	22
3	1	-2	3	22

Soma dos postos de sinal positivo = 174
Soma dos postos de sinal negativo = 102

Como T é a menor soma dos postos de mesmo sinal, logo $T = 102$.
Agora, deve-se calcular os valores de μ_T e σ_T para obter o valor de "Z" da normal.

$$\mu_T = \frac{23 * 24}{4} = 138 \text{ e } \sigma_T = \sqrt{\frac{23 * 24 * 47}{24}} = 32,8786$$

$$\text{Logo, } z = \frac{102 - 138}{32,8786} = -1,0949$$

Consultando a Tábua A, referente às probabilidades associadas aos valores observados de z na Distribuição Normal, tem-se que $P = 2 * 0,1379 = 0,2758$, pois a prova é bilateral.
Agora apliquemos o teste T no grupo experimental.

TABELA 5. DADOS REFERENTES AO GRUPO EXPERIMENTAL NO PRÉ E PÓS-TESTE

Nº de acertos do grupo exp.				
Pré-teste	Pós-teste	d_i	d_i (em rank)	Posto de d_i
4	7	3	-1	-4,5
3	5	2	1	4,5
3	6	3	1	4,5
4	5	1	1	4,5
2	4	2	1	4,5
6	7	1	1	4,5
6	7	1	1	4,5
6	8	2	1	4,5
3	7	4	2	11,5
3	6	3	2	11,5
3	6	3	2	11,5
6	7	1	2	11,5
5	6	1	2	11,5
2	5	3	2	11,5
3	6	3	3	18,5
5	7	2	3	18,5
2	7	5	3	18,5
6	8	2	3	18,5
4	7	3	3	18,5
2	5	3	3	18,5
6	5	-1	3	18,5
7	9	2	3	18,5
3	7	4	4	23,5
3	4	1	4	23,5
6	7	1	5	25

Soma dos postos de sinal positivo $= 320,5$
Soma dos postos de sinal negativo $= 4,5$

Como T é a menor soma dos postos de mesmo sinal, logo $T = 4,5$.
Agora, deve-se calcular os valores de μ_T e σ_T para obter o valor de "Z" da normal.

$$\mu_T = \frac{25 * 26}{4} = 162,5 \text{ e } \sigma_T = \sqrt{\frac{25 * 26 * 51}{24}} = 37,1652$$

$$\text{Logo, } z = \frac{4,5 - 162,5}{37,1652} = -4,2513$$

Consultando a Tábua A, referente às probabilidades associadas aos valores observados de z na Distribuição Normal, tem-se que $P = 2 * 0,00003 = 0,00006$, pois a prova é bilateral.

Na tabela abaixo, encontra-se um resumo da aplicação do teste T nos grupos controle e experimental.

TABELA 6. PROVA DE WILCOXON PARA DUAS AMOSTRAS RELACIONADAS (PRÉ E PÓS-TESTE)

Amostras relacionadas	N^o de sujeitos	"T"de Wilcoxon	"Z"da normal	Nível P
Controle pré e cont. pós	23	102	1,0949	0,2758
Exp. pré e exp. pós	25	4,5	4,2513	0,00006

Através do teste$T$ de Wilcoxon e analisando o nível de probabilidade a uma significância de $0,05$ (5%), pode-se afirmar que houve, no grupo experimental, diferença significativa entre os dados obtidos no pré e pós-teste, pois $0,00006$ está na região de rejeição da hipótese H0 (resultados do grupo no pré e pós-teste são iguais), logo a intervenção provocou mudanças nos resultados obtidos por este grupo. E analisando o teste T no grupo de controle, pode-se dizer que não existe, neste grupo, diferença significativa entre os dados obtidos no pré e pós-teste, pois $0,2758$ está na região de aceitação da hipótese H0 (resultados do grupo no pré e pós-teste são iguais).

Para comparar os dados obtidos entre os grupos experimental e controle, utilizou-se o teste U de Mann-Whitney.

Método do teste U

Primeiramente ordenam-se os valores misturados dos dois grupos, em ordem crescente indicando sempre a que grupo cada valor pertence. Em seguida, fixando-se os valores referentes ao menor dos grupos, conta-se o número de vezes que um valor de um grupo precede um valor do outro grupo.

Para saber qual dos grupos deve ser fixado para o cálculo da estatística U, calcula-se o valor U para cada grupo. Onde U será o menor dos valores e U' será o maior.

- Grandes Amostras ($n > 20$)

Utiliza-se neste caso a aproximação Normal dada por:

$$\mu_U = \frac{n_1 n_2}{2} \quad \sigma_U = \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}} \quad z = \frac{U - \mu_U}{\sigma_U}$$

Aplicação do teste U de Mann-Whitney com os dados relativos aos grupos experimental e de controle.

- Para o pré-teste:

Nº acertos dos grupos	Posto dos dados	Nº acertos dos grupos	Posto dos dados
2 E	3,5	3 C	15
2 E	3,5	3 C	15
2 E	3,5	3 C	15
2 E	3,5	3 C	15
2 C	3,5	4 E	27,5
2 C	3,5	4 E	27,5
3 E	15	4 E	27,5
3 E	15	4 C	27,5
3 E	15	4 C	27,5
3 E	15	4 C	27,5
3 E	15	4 C	27,5
3 E	15	4 C	27,5
3 E	15	5 E	35,5
3 E	15	5 E	35,5
3 C	15	5 E	35,5
3 C	15	5 C	35,5
3 C	15	5 C	35,5
3 C	15	5 C	35,5
3 C	15	5 C	35,5

Nº acertos dos grupos	Posto dos dados
5 C	35,5
6 E	46
6 E	46
6 E	46
6 E	46
6 E	46
6 E	46
6 E	46
6 E	46
6 C	46
6 C	46
6 C	46
6 C	46
6 C	46
7 E	54
7 C	54
7 C	54

Soma de postos do grupo de controle = 795
Soma de postos do grupo experimental = 745

U' (n° de E que precede C) $= 2*4+9*12+5*15+5*18+5*26+2*27 = 465$
U (n° de C que precede E) $= 8*2+3*11+3*16+8*21+26 = 291$

$$\mu_U = \frac{27 * 28}{2} = 378 \quad \sigma_U = 59,3970 \quad z = -1,4647$$

- Para o pós-teste:

Nº acertos dos grupos	Posto dos dados	Nº acertos dos grupos	Posto dos dados
1 C	1,5	5 E	21,5
1 C	1,5	5 E	21,5
2 C	4	5 E	21,5
2 C	4	5 E	21,5
2 C	4	5 C	21,5
3 C	6,5	5 C	21,5
3 C	6,5	6 E	31,5
4 E	12,5	6 E	31,5
4 E	12,5	6 E	31,5
4 C	12,5	6 E	31,5
4 C	12,5	6 E	31,5
4 C	12,5	6 E	31,5
4 C	12,5	6 C	31,5
4 C	12,5	6 C	31,5
4 C	12,5	6 C	31,5
4 C	12,5	6 C	31,5
4 C	12,5	6 C	31,5
5 E	21,5	6 C	31,5
5 E	21,5	7 E	43,5

Nº acertos dos grupos	Posto dos dados
7 E	43,5
7 E	43,5
7 E	43,5
7 E	43,5
7 E	43,5
7 E	43,5
7 E	43,5
7 E	43,5
7 E	43,5
7 C	43,5
7 C	43,5
8 E	51,5
8 E	51,5
8 C	51,5
8 C	51,5
9 E	54,5
9 C	54,5

Soma de postos do grupo de controle = 604, 5
Soma de postos do grupo experimental = 935, 5

U (n° de E que precede C) $= 8 * 2 + 2 * 8 + 6 * 14 + 2 * 24 + 2 * 26 + 27 = 243$
U' (n° de C que precede E) $= 2 * 7 + 6 * 15 + 6 * 17 + 10 * 23 + 2 * 25 + 27 = 513$

$$\mu_U = \frac{27 * 28}{2} = 378 \quad \sigma_U = 59,3970 \quad z = -2,2728$$

TABELA 7. PROVA DE MANN-WHITNEY APLICADA AO PRÉ E PÓS-TESTE

Amostras	$\sum$ postos cont.	$\sum$ postos exp.	"U" de M-W	"Z" da normal	Nível p
Pré	795	745	291	-1,4647	0,1442
Pós	604,5	935,5	243	-2,2728	0,0232

Analisando o teste U de Mann-Whitney e observando o nível de probabilidade a uma significância de $0,05$ (5%), pode-se afirmar que não houve, em relação ao pré-teste, diferença significativa entre os dados obtidos no grupo de controle e experimental, pois $0,1442$ está na região de aceitação da hipótese H0 (resultados do pré-teste nos grupos de controle e experimental são iguais). E através da aplicação do teste U no pós-teste, pode-se dizer que existe, diferença significativa entre os dados obtidos no grupo de controle e experimental, pois $0,0232$ está na região de rejeição da hipótese H0 (resultados do pós-teste nos grupos de controle e experimental são iguais).

Observa-se, através da soma dos postos, que no pré-teste o grupo de controle teve um número de acertos maior que o grupo experimental. Pode-se notar também, através da soma dos postos, que no pós-teste o grupo experimental teve um número de acertos maior que o grupo de controle.

Através do resultado do teste pode-se concluir que o grupo experimental teve um maior desempenho após a intervenção.

TABELA 8. MÉDIA DO NÚMERO DE ACERTOS DOS SUJEITOS DOS GRUPOS DE CONTROLE E EXPERIMENTAL, NO PRÉ E PÓS-TESTE

Grupo	Teste	Média do n^o de acertos
Controle	Pré	5,2857
	Pós	4,6786
Experimental	Pré	4,2222
	Pós	6,2593

3.2 Análise dos dados obtidos na 6^a série

Os dados a serem analisados foram adquiridos através da aplicação de um pré-teste e de um pós-teste para os 52 alunos distribuídos nos grupos de controle (6°1) e experimental (6°2).

Às 10 questões presentes tanto no pré-teste quanto no pós-teste foram atribuídos 1 ponto para os acertos e 0 ponto para os erros.

Os objetivos de cada uma das questões eram:

Questão 1: identificação das partes de um ângulo;
Questão 2: conceituação de ângulo agudo, reto e obtuso;
Questão 3: relação de ângulos com objetos do cotidiano;
Questão 4: diferenciação entre ângulos maiores e menores que um ângulo reto;

Questão 5: diferenciação dos vários tipos de ângulos;
Questão 6: relação de ângulos na circunferência (informalmente);
Questão 7: ângulo entre os ponteiros de um relógio;
Questão 8: uso do transferidor:
Questão 9: definição de bissetriz;
Questão 10: operações com ângulos.

Segue abaixo, a relação do número de acertos e erros, no pré-teste, por questão.

TABELA 9: PORCENTAGEM DE ERROS NAS 10 QUESTÕES DO PRÉ-TESTE PARA 26 ALUNOS DE CADA GRUPO

Questão	N° de acertos					
	G C.			G E.		
	$\sum$ pontos	% erros	% acertos	$\sum$ pontos	% erros	% acertos
1	23	12%	88%	12	54%	46%
2	13	50%	50%	6	77%	23%
3	4	85%	15%	0	100%	0%
4	8	65%	35%	7	73%	27%
5	6	77%	23%	3	89%	11%
6	5	81%	19%	0	100%	0%
7	5	81%	19%	1	96,2%	3,8%
8	18	31%	69%	15	42,1%	57,9%
9	5	81%	19%	9	65,4%	34,6%
10	2	92,3%	7,7%	0	100%	0%

TABELA 10: PORCENTAGEM DE ERROS NAS 10 QUESTÕES DO PÓS- TESTE PARA 26 ALUNOS DE CADA GRUPO

Questão	N° de acertos					
	G C.			G E.		
	$\sum$ pontos	% erros	% acertos	$\sum$ pontos	% erros	% acertos
1	18	38,8%	69,2%	14	46,2%	53,8%
2	9	65,4%	34,6%	17	34,7%	65,3%
3	7	73%	27%	17	34,7%	65,3%
4	10	61,5%	38,5%	16	38,5%	61,5%
5	3	88,5%	11,5%	15	42,1%	57,9%
6	6	77%	23%	14	46,2%	53,8%
7	2	92,3%	7,7%	9	65,4%	34,6%
8	18	30,8%	69,2%	23	11,5%	88,5%
9	3	88,5%	11,5%	15	34,8%	65,2%
10	2	92,3%	7,7%	2	92,5%	7,7%

TABELA 11. PONTUAÇÃO DOS SUJEITOS NOS GRUPOS DE CONTROLE E EXPERIMENTAL, NO PRÉ E PÓS-TESTE

Sujeito	N° de acertos			
	G.C.(6°1)		G.E.(6°2)	
	Pré	Pós	Pré	Pós
01	10	7	3	7
02	8	9	3	6
03	4	3	1	7
04	3	4	2	1
05	4	4	2	9
06	9	9	1	8
07	5	5	5	10
08	0	1	2	5
09	2	3	0	2
10	1	3	0	2
11	0	2	2	6
12	2	4	4	10
13	1	2	2	4
14	1	1	2	7
15	3	2	1	2
16	2	1	1	3
17	3	3	1	6
18	2	4	0	1
19	1	0	1	2
20	5	2	3	7
21	2	2	4	5
22	2	0	3	4
23	6	5	3	8
24	6	4	2	5
25	4	2	4	8
26	2	2	4	9

Analisando, na tabela, os dados obtidos no pré e pós-teste entre o grupo experimental e o de controle, constata-se um aumento considerável de acertos por sujeitos do grupo experimental. E no grupo de controle, percebe-se que alguns sujeitos apresentam um maior número de erros no pós-teste.

A análise estatística feita através do teste T de Wilcoxon, que é utilizado para comparar duas amostras relacionadas, comprova a diferença de resultados existente entre os grupos controle e experimental no pré e pós-teste.

TABELA 12: DADOS REFERENTES AO GRUPO DE CONTROLE NO PRÉ E PÓS TESTE

d_i	Posto de d_i	Ranking
-3	-5,5	-1
1	-5,5	-1
-1	-5,5	-1
1	-5,5	-1
0	-5,5	-1
0	5,5	1
0	5,5	1
1	5,5	1
1	5,5	1
2	5,5	1
2	-14	-2
2	-14	-2
1	-14	-2
0	14	2
-1	14	2
-1	14	2
0	14	2
2	-18,5	-3
-1	-18,5	-3
-3		
0		
-2		
-1		
-2		
-2		
0		

Soma de postos de sinal +: $83,5$
Soma de postos de sinal -: $106,5$
Como T é a menor soma dos postos de mesmo sinal, logo $T = 83,5$
Agora, deve-se calcular os valores de μ_T e σ_T para obter o valor de "Z" da normal.

$$\mu_T = \frac{19 * 20}{4} = 95 \text{ e } \sigma_T = \sqrt{\frac{19 * 20 * 39}{24}} = 24,84954$$

$$\text{Logo, } z = \frac{83,5 - 95}{24,84954} = -0,462785$$

Consultando a Tábua A, referente às probabilidades associadas aos valores observados de z na Distribuição Normal, tem-se que $P = 2 * 0,3228 = 0,6456$, pois a prova é bilateral.

H0: não houve diferença significativa

Para o nível de significância de $0,05$ (5%) no nível P, se $P < 0,05$ rejeita-se H0. Se

$P > 0,05$aceita-se H0. Assim, como $P = 0,6456 > 0,05$, aceita-se H0, ou seja, não houve diferença significativa entre os testes.

TABELA 13: DADOS REFERENTES AO GRUPO EXPERIMENTAL NO PRÉ E PÓS TESTE

d_i	Posto de d_i	Ranking
4	-3,5	-1
3	3,5	1
6	3,5	1
-1	3,5	1
7	3,5	1
7	3,5	1
5	8	2
3	8	2
2	8	2
3	11,5	3
4	11,5	3
6	11,5	3
2	11,5	3
5	15,5	4
1	15,5	4
2	15,5	4
5	15,5	4
1	20	5
1	20	5
4	20	5
1	20	5
1	20	5
5	23,5	6
3	23,5	7
4	25,5	7
5	25,5	

Soma de postos de sinal +: $347,5$
Soma de postos de sinal -: $3,5$
Como T é a menor soma dos postos de mesmo sinal, logo $T = 3,5$
Agora, deve-se calcular os valores de μ_T e σ_T para obter o valor de "Z" da normal.

$$\mu_T = \frac{26 * 27}{4} = 175,5 \text{ e } \sigma_T = \sqrt{\frac{26 * 27 * 53}{24}} = 39,3732$$

$$\text{Logo, } z = \frac{3,5 - 175,5}{39,3732} = -4,3684$$

Consultando a Tábua A, referente às probabilidades associadas aos valores observados de z na Distribuição Normal, tem-se que $P = 2 * 0,00003 = 0,00006$, pois a prova é bilateral.

H0: não houve diferença significativa

Para o nível de significância de $0,05$ (5%) no nível P, se $P < 0,05$ rejeita-se H0. Se $P > 0,05$ aceita-se H0. Assim, como $P = 0,00006 < 0,05$, rejeita-se H0, ou seja, houve diferença significativa entre os testes.

TABELA 14. PROVA DE WILCOXON PARA DUAS AMOSTRAS RELACIONADAS (PRÉ E PÓS-TESTE)

Amostras	N° de sujeitos	"T"de Wilcoxon	"Z"da normal	Nível P
Cont. pré e pós	19	83,5	0,4627	0,6456
Exp. pré e pós	26	3,5	4,3684	0,00006

Agora, iremos aplicar o teste "U"de Mann-Whitney que faz uma comparação entre os grupos.

TABELA 15. DADOS REFERENTES AOS GRUPOS EXPERIMENTAL E DE CONTROLE NO PRÉ-TESTE

N° de acertos	Postos	N° de acertos	Postos
0E	3	2C	22,5
0E	3	2C	22,5
0E	3	2C	22,5
0C	3	3E	33,5
0C	3	3E	33,5
1E	10,5	3E	33,5
1E	10,5	3E	33,5
1E	10,5	3E	33,5
1E	10,5	3C	33,5
1E	10,5	3C	33,5
1E	10,5	3C	33,5
1C	10,5	4E	41
1C	10,5	4E	41
1C	10,5	4E	41
1C	10,5	4E	41
2E	22,5	4C	41
2E	22,5	4C	41
2E	22,5	4C	41
2E	22,5	5E	46
2E	22,5	5C	46
2E	22,5	5C	46
2E	22,5	6C	48,5
2C	22,5	6C	48,5
2C	22,5	8C	50
2C	22,5	9C	51
2C	22,5	10C	52

Soma de postos do grupo de controle = 771
Soma de postos do grupo experimental = 607
U'(n° de E que precede C) = $2 * 3 + 4 * 9 + 7 * 16 + 21 * 3 + 25 * 3 + 26 * 7 = 474$
U (n° de C que precede E) = $2 * 6 + 6 * 7 + 13 * 5 + 16 * 4 + 19 * 1 = 202$

$$\mu_U = 338 \quad \sigma_U = 54,64 \quad z = -2,49$$

TABELA 16. DADOS REFERENTES AOS GRUPOS EXPERIMENTAL E DE CONTROLE NO PÓS-TESTE

N° de acertos	Postos	N° de acertos	Postos
0C	1,5	4C	27
0C	1,5	4C	27
1C	5	4E	27
1C	5	4E	27
1C	5	5C	33
1E	5	5C	33
1E	5	5E	33
2C	12,5	5E	33
2C	12,5	5E	33
2C	12,5	6E	37
2C	12,5	6E	37
2C	12,5	6E	37
2C	12,5	7C	41
2C	12,5	7E	41
2E	12,5	7E	41
2E	12,5	7E	41
2E	12,5	7E	41
3C	19,5	8E	45
3C	19,5	8E	45
3C	19,5	8E	45
3C	19,5	9C	48,5
3E	19,5	9C	48,5
3E	19,5	9E	48,5
4C	27	9E	48,5
4C	27	10E	51,5
4C	27	10E	51,5

Soma de postos do grupo de controle = $522,5$
Soma de postos do grupo experimental = $849,5$
U (n° de E que precede C) = 124
U' (n° de C que precede E) = 530

$$\mu_U = 338 \quad \sigma_U = 54,64 \quad z = -3,91$$

TABELA 17. PROVA DE MANN-WHITNEY APLICADA AO PRÉ E PÓS-TESTE

Amostras	$\sum$ postos C	Soma postos E	"U"de M.W.	"Z"da normal	Nível p
Pré	771	607	202	-2,49	0,0064
Pós	522,5	855,5	124	-3,91	0,00005

Análise: H0: Não houve diferença significativa
Se $p < 0,0003$ rejeita-se H0
Se $p > 0,0003$ aceita-se H0

Observa-se que no pré-teste, o grupo de controle (6°1) teve um número de acertos maior que o do grupo experimental (6°2), entretanto, esta diferença não foi significativa, o que fica comprovado pelo teste T de Mann Whitney, com $Z = -2,49$ e $p = 0,0064 > 0,0003$.

Pode-se notar também que no pós-teste, o grupo experimental (6°2), teve um número de acertos maior que o do grupo de controle (6°1), e que esta diferença foi significativa, o que fica comprovado pelo teste Tde Mann Whitney, com $Z = -3,91$ e $p = 0,00005 < 0,0003$.

Em outras palavras, os resultados obtidos nos dois testes estatísticos comprovam que a teoria de van Hiele foi eficiente no ensino de Geometria para a 6° série do ensino fundamental.

TABELA 18. MÉDIA DO NÚMERO DE ACERTOS DOS SUJEITOS DOS GRUPOS DE CONTROLE E EXPERIMENTAL, NO PRÉ E PÓS-TESTE

Grupo	Teste	Média do n° de acertos
Controle	Pré	3,42
	Pós	3,23
Experimental	Pré	2,11
	Pós	5,57

4 Considerações Finais

O presente trabalho foi desenvolvido com base no modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico segundo a teoria de van Hiele e também, nas contribuições da Psicologia Genética Piagetiana.

Ressalta-se que o modelo de van Hiele fundamenta-se na teoria de que o desenvolvimento mental está ligado às mudanças cognitivas dos alunos e em experiências educacionais, e, está baseado em três elementos: a influência da Psicologia da Gestalt, uma forte base estruturalista e a preocupação com a didática da Matemática.

Para comprovar a eficiência do modelo de van Hiele foi necessária a escolha de dois grupos de alunos para cada série, sendo um de controle e o outro experimental. Para selecionar os alunos que iriam compor tais grupos, levou-se em consideração o resultado do pré-teste e foi intencionalmente escolhida a classe que apresentou menor índice de acertos no pré-teste para compor o grupo experimental, o qual sofreu a intervenção pedagógica.

Fundamentando-se no modelo geométrico de van Hiele e com o apoio da teoria de Piaget, foram elaboradas, para as sessões de intervenção, atividades geométricas

explorando-se material concreto, e observando-se a evolução do desenvolvimento do pensamento geométrico dos sujeitos desta pesquisa, segundo os níveis 0 (visualização) e 1 (análise), identificados por van Hiele.

A análise dos resultados mostrou que ao final do processo de intervenção os alunos do grupo experimental apresentaram modificações nítidas em relação aos níveis de van Hiele, enquanto que os alunos do grupo de controle não apresentaram evolução significativa nas questões do pós-teste e alguns até apresentaram desempenho inferior ao verificado no pré-teste, indicando assim a vantagem da intervenção baseada na teoria de van Hiele.

Verificou-se, através dos dados obtidos, que o processo de intervenção não atingiu igualmente todos os sujeitos, pois o processo educativo é de grande complexidade, envolvendo inúmeras variáveis dentre as quais o nível cognitivo dos alunos, suas experiências anteriores e também as condições sócio-econômicas em que vivem.

A análise de dados coletados para este trabalho representa uma contribuição para a ampliação dos conhecimentos existentes sobre o processo ensino – aprendizagem de Geometria e possíveis implicações pedagógicas que possam advir a nível da Educação Matemática.

Os dados indicam, também, que é importante um maior investimento em pesquisas em relação ao ensino de Geometria, levando em conta a comprovação da eficiência do modelo de van Hiele, especialmente no primeiro grau. Este trabalho também mostra que existem possibilidades interessantes em atividades semelhantes às desenvolvidas nesta pesquisa que podem melhorar o ensino de Geometria no 1° grau.

Essas considerações mostram que um educador interessado na evolução cognitiva de seus alunos, não pode apenas restringir-se ao conhecimento do conteúdo a ser desenvolvido em sala de aula. Ao invés de transmitir o conhecimento pronto é necessário buscar estratégias de ensino que favoreçam o interesse e a motivação dos alunos. O professor deve criar situações de encorajamento em sala de aula, que leve os estudantes a buscar respostas para suas perguntas. Como esse tipo de atitude requer muita habilidade por parte do docente, muitos deles ensinam Geometria somente seguindo o livro didático, o que implica no desinteresse em aprender por parte dos alunos, gerando assim, uma espécie de caos no ensino em geral.

Portanto, é sempre importante que o profissional em educação busque formas eficazes que melhorem a qualidade do processo ensino – aprendizagem, como por exemplo, o modelo de van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico.

5 Referências Bibliográficas

[1] CAMPBELL, D.T. e STANLEY, J.C. Delineamentos experimentais e quase-experimentais de pesquisa. E.P.U. Edusp, 1979.

[2] CROWLEY, M. L. O modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico. In Aprendendo e ensinando geometria. Lindquist, Mary Montgomery e Shulte, Albert P. (org), trad. De Hygino H. Domingues, São Paulo, Atual 1994.

[3] GUIMARÃES, P.R.B. Estatística não-paramétrica. Universidade Federal do Paraná, Departamento de Estatística, outubro 2002.

[4] LUJAN, M.L; A Geometria na 1^o série do 1^o grau: Um trabalho na perspectiva de

van Hiele. Tese de Mestrado-Universidade Estadual de Campinas – Unicamp/Campinas/SP, 1997.

[5] MATOS, J.M. Acomodando a teoria de van Hiele a modelos cognitivos idealizados. In Quadrante I, (pág.93-112), 1992.

[6] NASSER, L. A teoria de van Hiele: pesquisa e aplicação. Trabalho apresentado no 1^o Seminário Internacional de Educação Matemática. UFRJ, 1993.

[7] SIEGEL, S. Estatística não paramétrica para as ciências do comportamento. McGRAW-HILL, 1975.

[8] MATOS, J.M. Cronologia recente do ensino da Matemática [recente chronology of mathematics teaching]. Lisbon: Associação de Professores de Matemática,1985.

[9] MATOS, J.M. Cognitive models in geometry. In J.P. Ponte, D. Fernandes, J.F. Matos, & J.M. Matos (Eds.), Mathematical problem solving and information technologies: Research in contexts of practice (Berlim: Springer).

[10] VAN HIELE, P.M. Structure and Insight. Academic Press – 1986.

[11] VAN HIELE-GELDOF, DINA. "Dissertation of Dina van Hiele-Geldof Entitled: The Ditactic of Geometry in the lowest Class of Secondary School". Em English Translation of Selected Wrintings of Dina van Hiele-Geldof and Pierrre M. van Hiele, editado por por Dorothy G., David F. e Rosamond T. como parte do projeto de pesquisa "An investigation of the van Hiele model od thinking in geometry among adolescents", Research in Sciense Education (RISE), Program of the National Science Foundation, Grant n^o 7920640. Washington, D.C.:NSF 1984a. (Trabalho original publicado em 1957).

[12] http://www.gestaltsp.com.br/gestalt.htm.